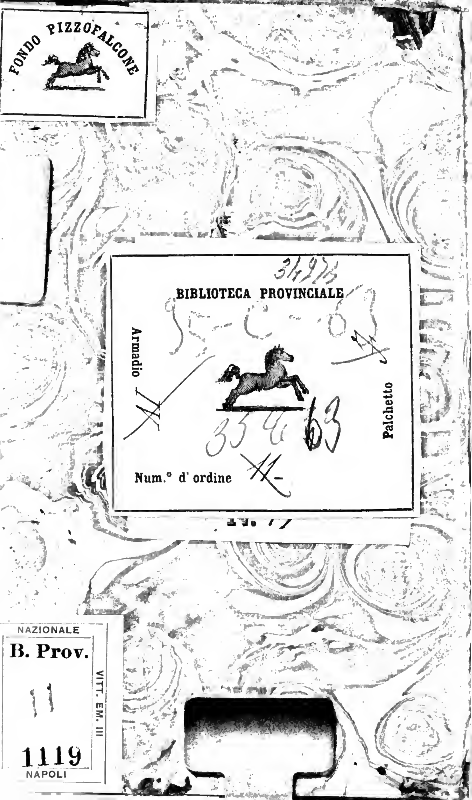



FONDO PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
1119
NAPOLI



COURS DE *MATHEMATIQUE*,

QUI CONTIENT,

TOUTES LES PARTIES DE CETTE SCIENCE, MISES A LA PORTÉE DES COMMENÇANS.

PAR M. CHRETIEN WOLF,

Professeur de Mathematique & de Philosophie dans l'Université de Hale, Membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse.

Traduit en François & augmenté considerablement par D. ***, de la Congrégation de Saint Maur

TOME PREMIER.

QUI renferme l'Arithmétique, l'Algébre, la Géometrie, la Trigonometrie rectiligne, la Mecanique, l'Hydrostatique, l'Airometrie & l'Hydraulique.

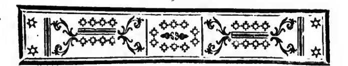
A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gille-cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLVII.

Avec Approbation & Privilege du Roy.





PREFACE
DU TRADUCTEUR.

RIEN de plus propre à joindre l'agréable à l'utile que les Mathématiques. On le sçait, & on l'a reconnu particuliérement dans notre siécle, où l'on a trouvé l'heureux secret d'unir la solidité des sciences abstraites avec la politesse des connoissances du goût. Ce n'est plus un terrain herissé d'épines & d'un difficile accès ; on se livre avec satisfaction aux méditations profondes que demandent les mathématiques, quand on est capable de gouter le plaisir que procure la découverte des vérités qui en sont l'objet ; & l'on regarderoit avec raison comme des esprits superficiels, de peu de consistance, & sans goût, ceux qui s'en formeroient l'idée comme d'une science austere & sauvage, qui ne sauroit s'allier avec la délicatesse des belles Lettres.

L'objet des Mathématiques est la vérité pure ; ses preuves sont des démonstrations exactes, & ses effets des choses surprenan-

tes. Nous avons peu de commodités dans la vie, peu d'embélissemens dans tout ce qui se présente à nos yeux, dont nous ne soyons redevables à ceux qui ont consacré leurs veilles à cultiver cette Science, qu'on regarde à juste titre comme la clef de toutes les autres. Y a-t-il rien de plus merveilleux que toutes ces machines animées, si j'ose le dire, par les Mathématiques, qui dirigent l'arrangement de leurs ressorts, réglent leur mouvement, & conduisent toutes leurs opérations. Quoi de plus admirable, que ces instrumens qui décorent les boutiques des artisans, & qui certainement ne manqueroient pas de spectateurs, si nous sçavions admirer l'esprit & l'invention qui y brille par tout. L'envie de sçavoir si naturelle à l'homme se réveilleroit à cet aspect: ce désir ardent d'acquerir toujours de nouvelles connoissances, se ranimeroit à la vûe de si belles choses. Car l'esprit de l'homme veut tout sçavoir; & rien ne marque mieux combien il est destiné à la vérité, que le charme qu'il éprouve quelque-fois malgré lui, dans les spéculations les plus seches de l'algébre.

Les Mathematiques, en ouvrant l'esprit, developent ses facultés, lui en ménagent l'usage, & le forment à la précision. Elles l'habituent à l'attention en le fixant;

elles lui donnent de l'étendue en multipliant ſes lumieres, de la pénétration & de la délicateſſe par l'exercice ; leur méthode y grave inſenſiblement cet ordre dans les idées & cette juſteſſe de raiſonnement qui rendent un homme véritablement homme. Mais la méthode qui produit de ſi beaux fruits, eſt celle des anciens Géométres, & de laquelle nous remettons à parler dans le diſcours préliminaire, à la ſuite de cette Préface.

Le grand ouvrage que M. Wolf avoit donné ſelon cette méthode, premierement en Allemand, puis en latin, ayant paru d'une trop grande étendue pour le donner en leçons dans le tems fixé pour un cours de Mathématiques, il en fit un abregé pour l'uſage particulier des Ecoles ; mais cet abrégé eſt ſi ſuccint que je n'ai pas cru devoir me contenter d'en donner une ſimple traduction. Je ſuis entré dans un plus grand détail ; j'ai changé quantité de choſes qui ne me paroiſſent pas du goût François : j'ai ſouvent étendu le diſcours beaucoup plus qu'il ne l'étoit dans l'original, j'ai inſeré des remarques, ſans les diſtinguer du texte, dans bien des endroits où je les ai crû néceſſaires. J'ai ajouté quantité de définitions des termes & des choſes ; des ſuplémens à certains traités,

des traités même entiers, pour rendre l'ouvrage complet; tels sont l'arithmétique palpable dans le premier volume, la Navigation dans le second, & les Feux d'Artifice dans le troisiéme, dans lesquels je n'ai suivi M. Wolf, pour ainsi dire, que dans la Méthode. Ces augmentations & ces changemens m'ont obligé d'augmenter de près de la moitié le nombre des planches, dont j'ai changé la plus-part des desseins, & les ai fait graver avec plus d'élégance & de goût: de maniere que c'est un ouvrage tout nouveau, ou du moins si différent de ce que M. Wolf avoit dit sur ces matieres, qu'il ne s'y reconnoîtroit pas lui-même. Les lecteurs trouveront dans ces trois volumes, non-seulement de quoi se former une idée des Sciences qui y sont traitées, mais tout ce qu'il faut pour être en état de les entendre, d'en parler avec exactitude, & de les étudier par eux-mêmes dans les livres qui en traitent plus au long. Le Public attendoit cette traduction avec impatience; il est heureux pour moi d'avoir travaillé à la satisfaire, mais je m'estimerai plus heureux encore, si mon travail remplit pleinement les vûes que je me suis proposé.

AVIS AU RELIEUR

Pour placer les 69 Planches de cet Ouvrage.

TOutes les Planches ſe plieront en trois, en conſervant le papier blanc pour les faire ſortir hors du livre, & ſe placeront à la fin du Traité auquel elles appartiennent, dans l'ordre ſuivant.

TOME PREMIER.

1. La Planche d'Arithmétique à la fin de ce Traité *page* 79
0. Il n'y a point de Planches au Traité d'Algebre.
8. Les 8 Planches de Géométrie à la fin des Elemens de Géométrie, *page* 252
1. La Planche de Trigonometrie à la fin de ce traité, *page* 274
3. Les trois Planches de Mécanique, à la fin de la Mécanique, *page* 226
1. La Planche d'Hydroſtatique & d'Airométrie, qui ne fait qu'une ſeule Planche, à la fin de l'Airometrie, *page* 368
2. Les deux Planches d'Hydraulique, à la fin du premier volume, *page* 388

TOME SECOND.

1. La Planche d'Optique à la fin de ce Traité, *page* 26
1. La Planche de Catoptrique, à la fin de la Catoptrique, *page* 47
2. Les deux Planches de Dioptrique à la fin des Elemens de Dioptrique, *page* 82
6. Les ſix Planches de Perſpective, à la fin de ce Traité, *page* 114
1. La Planche de Géographie, à la fin de la Géographie, *page* 150
0 Il n'y a point de Planches au Traité de Chronologie.
4. Les quatre planches de Gnomonique à la fin des Elemens de Gnomonique. *page* 206
3. Les trois Planches d'Aſtronomie à la fin de ce Traité, *page* 323

TOME TROISIEME.



DISCOURS



DISCOURS PRELIMINAIRE

SUR LA MÉTHODE DONT ON SE ſert pour traiter les Mathématiques.

§. I.

La *Méthode Mathématique* n'eſt autre choſe que l'ordre que ſuivent les Mathématiciens en traitant les Sciences qui font partie des Mathématiques. On commence par les *Définitions*, on continue par les *Axiomes*, d'où l'on forme des *Théorêmes*, & puis des *Problêmes*, qui produiſent des *Corollaires*, & l'on y lie des *Remarques*, ſelon que les uns ou les autres en ont béſoin.

§. II.

Les *Définitions* ſont des notions claires & diſtinctes par le moyen deſquelles on diſtingue non-ſeulement une choſe d'avec une autre, mais qui nous y font encore découvrir tout ce qu'on peut en concevoir. On les réduit à deux ſortes, les *Définitions nominales*, & les *Définitions réelles*, ou ſi l'on veut, *Définitions des noms* & *Définitions des choſes.*

§. III.

Les définititions des noms renferment des marques suffisantes pour faire distinguer une chose qui porte tel ou tel nom, d'avec une autre chose, qui en porte un différent. Comme lorsqu'on dit dans la Géométrie, le quarré est une figure qui a quatre angles & quatre côtés.

§. IV.

Les définitions réelles expliquent clairement la formation des choses, c'est-à-dire, la maniere dont elles se font. Telle est, par exemple, la définition du cercle dans la Géométrie; lorsqu'on dit qu'il se fait par le mouvement d'une ligne droite autour du point fixe.

§. V.

La *Notion* est la réprésentation que l'esprit se forme de quelque chose que ce puisse être.

§. VI.

La *Notion claire* est celle qui suffit pour reconnoître une chose qui nous est présentée; pour dire, par exemple, une telle figure est un *Triangle*.

§. VII.

La *Notion obscure ou confuse* est au contraire celle qui ne suffit pas, pour determiner précisément ce que c'est que telle chose. Si l'on me montre,

par exemple, une plante, & que l'ayant examinée, je doute encore ſi je l'ai vûe ailleurs, ou ſi cette plante eſt celle qui porte tel ou tel nom, c'eſt alors une notion obſcure.

§. VIII.

Une notion claire *eſt diſtincte*, lorſqu'on peut expliquer les marques auſquelles on reconnoît la choſe qu'on nous préſente; par exemple, que le cercle eſt une figure terminée par une ligne courbe, revenant ſur elle-même, dont chaque point eſt également éloigné de celui qui eſt au centre.

§. IX.

Une notion claire *eſt confuſe* quand vous ne pouvez dire ce à quoi vous reconnoiſſez telle choſe quoiqu'elle ait néantmoins des marques qui la diſtinguent des autres. Telle eſt, par exemple la notion qu'on a de la couleur rouge.

§. X.

La notion diſtincte eſt *entiere*, & peut être cenſée *parfaite*, lorſque vous connoiſſez diſtinctement toutes les parties qui compoſent une choſe, & les marques qui vous la font diſtinguer d'une autre. Par exemple la notion du cercle dont je viens de parler (§. VIII.) eſt cenſée une notion parfaite, ſi vous avez une connoiſſance diſtincte d'une courbe qui retourne ſur elle-même, d'un point placé au milieu, d'une égalité de diſtance, & de la termination.

§. XI.

La notion eſt au contraire *imparfaite*, ſi l'on n'a que des connoiſſances confuſes & obſcures des parties de la choſe, & des marques qui la diſtinguent d'une autre.

§. XII.

On n'admet dans les Mathématiques que des notions diſtinctes, & même autant entieres & parfaites qu'elles peuvent l'être, quand il s'agit de donner des définitions des noms & des choſes.

§. XIII.

Ainſi dans les définitions contenues dans cet ouvrage, on n'employera que des termes aſſez intelligibles par eux-mêmes, ou dont l'explication aura précédée.

§. XIV.

Lorſque nous nous contentons d'une notion confuſe, nous ſuppoſons qu'on peut avoir aiſément entre les mains les choſes dont on veut parler, pour s'en inſtruire par ſes propres yeux; ou que l'ayant vûe ſouvent, il ſera facile de ſe la retracer dans la mémoire.

§. XV.

Quant aux définitions réelles, elles nous apprennent comment la choſe eſt poſſible; c'eſt-à-

dire, la voye qu'il faut tenir, & la maniere de former cette chose (§. IV.) Voilà pourquoi il y a deux choses à observer sur cette espéce de définition; 1°. Sçavoir si ce qui doit concourir à la formation de la chose existe, ou peut exister? 2°. Si elles ont véritablement les proprietés que nous leur attribuons; par exemple, s'il est vrai *qu'un cercle se puisse faire par le mouvement d'une ligne droite autour & à égale distance d'un point fixe*. Il faut pour que la chose soit possible, un point, une ligne droite, l'immobilité d'un point, qui puisse régler le mouvement de la ligne; & enfin un mouvement de la ligne tel qu'elle retourne au point même d'où elle étoit partie.

§. XVI.

On peut considerer les définitions de noms & les définitions réelles en elles-mêmes, & les comparer les unes aux autres. Lorsqu'en les considerant on en conclut immédiatement quelque chose, ce qu'on en conclut s'appelle *Axiome*. En examinant, par exemple, la formation d'un cercle, on en conclut aisément, que toutes les lignes, menées du centre à la circonférence, sont égales, puisqu'elles ne représentent qu'une même ligne placée en différens endroits du cercle, & voilà pourquoi cette proposition passe pour un axiome: M. de Tschirnausen prend ce terme dans ce sens-là. On appelle communément *Axiome*, toute proposition qui est si évidente, qu'elle n'a pas besoin de démonstration; ce qui est conforme à l'idée qu'Euclide & les autres anciens Géométres en ont eu.

§. XVII.

Les axiomes expriment l'exiſtence d'une choſe ; ou ſa poſſibilité. Ceux de la premiere eſpéce ſont ceux dont nous venons de donner un exemple ; à ſçavoir *toutes les lignes menees du centre d'un cercle à ſa circonference, ſont égales entr'elles.* Les axiomes de la ſeconde eſpéce ſont, par exemple, la propoſition qui naît de la définition de la ligne droite : à ſçavoir que *d'un point à un autre point on peut tirer une ligne droite.* Les axiomes de cette eſpéce s'appellent *Petitions* ou *demandes.*

§. XVIII.

Comme la vérité de ces deux eſpéces d'axiomes eſt connue par le ſeul aſpect des définitions d'où ils naiſſent, ils n'ont béſoin d'aucune démonſtration. Car cette même vérité devient évidente par la ſeule preuve de la réalité des définitions. C'eſt pourquoi on ne peut porter un jugement certain ſur la vérité ou la fauſſeté d'un axiome, avant d'avoir examiné la poſſibilité de la définition. Autrement on ſeroit ſimplement aſſuré que l'axiome ſera vrai, ſi l'on ſuppoſe la définition poſſible.

§. XIX.

On confond quelquefois ces deux eſpéces d'axiomes avec les expériences. Or nous diſons *ſçavoir une choſe par experience*, lorſque la connoiſſance que nous en avons, nous eſt venue de l'attention que nous avons faite ſur nos propres perceptions ; par exemple, lorſqu'on allume une

chandelle dans un lieu obſcur, nous voyons autour de nous bien des choſes que nous n'appercevions pas auparavant; nous diſons alors que nous ſçavons par expérience qu'on ne peut voir dans l'obſcurité, ſans lumiere. Les expériences ne ſont donc que des propoſitions qui regardent des choſes particulieres, puiſque nous n'apperçevons les choſes qu'en particulier.

§. XX.

Lorſqu'ayant comparé pluſieurs définitions les unes avec les autres, nous en inférons quelque propoſition que nous n'aurions pû tirer de l'examen d'une ſeule, la concluſion que nous en tirons s'appelle *Théoréme*. Par exemple, dans la Géométrie, je compare un triangle avec un parallelogramme poſés ſur la même baſe, & ayant même hauteur. J'infere partie de leurs définitions, partie de leurs propriétés déja connues, qu'un tel parallelogramme eſt le double du triangle; alors cette propoſition, *un triangle eſt la moitié d'un parallelogramme, qui a même baſe & même hauteur*, eſt un *Theoreme*.

§. XXI.

Deux choſes dans les Théorêmes demandent beaucoup d'attention. La *propoſition* en elle-même & la *demonſtration*. La premiere indique ce qui peut convenir ou non à une choſe, certaines conditions une fois poſées; la ſeconde donne & explique les raiſons qui nous font concevoir que cela convient à une telle choſe, ou ne lui convient pas.

§. XXII.

Les principes des démonſtrations ſont en partie les définitions des termes & des choſes contenus dans la propoſition, & en partie les propriétés que nous découvrons des choſes dans leurs définitions. Or comme on n'admet point de principes dans les Mathématiques, qui n'ayent été prouvés auparavant, on cite communément les définitions & les propoſitions d'où on les a tiré ; tant pour montrer la ſimplicité & la vérité des principes ſur leſquels on établit ſon raiſonnement, que pour indiquer à ceux qui ne ſont pas bien au fait, les ſources de la certitude de ces mêmes principes.

§. XXIII.

La méthode qu'on ſuit dans les Mathématiques pour tirer les conſéquences des principes, eſt la même que celle qu'on trouve dans les traités de Logique, où l'on parle du ſillogiſme : car les démonſtrations des Mathématiciens, ne ſont autre choſe qu'un aſſemblage d'enthymêmes ; de façon qu'on y conclut tout par la force des ſillogiſmes, excepté qu'on omet ſouvent les premices, qui ſe préſentent d'eux-mêmes à l'eſprit, ou que l'on rappelle dans la mémoire à l'aide des citations. Clavius prouve ce que nous venons de dire dans ſa démonſtration de la premiere propoſition des Elémens d'Euclide ; Herlinus & Daſipodius ont démontré par des ſillogiſmes en forme, les ſix premiers Elemens d'Euclide, & Heniſchius toute l'Arithmétique.

§. XXIV.

Les *Problêmes* propoſent quelque choſe à faire ; & ſont composés de trois parties qui ſont la *propoſition*, la *Solution* & la *Demonſtration.* Dans la propoſition on indique ce qu'on propoſe à faire ; la Solution donne par ordre tous les moyens de réuſſir à faire la choſe propoſée ; & la démonſtration prouve qu'on doit néceſſairement en venir à bout, en ſuivant la méthode & les moyens que la ſolution preſcrit. C'eſt pourquoi toutes les fois qu'un problême a béſoin de démonſtration, on le convertit en Théorême, dont la propoſition conſtitue la queſtion, & la ſolution forme l'*hypothèſe.* Car telle eſt ordinairement la teneur de tous les Problêmes, auſquels il faut une démonſtration ; & en ſuivant ce que preſcrit la Solution, on fait en même tems la choſe propoſée.

§. XXV.

On eſt quelquefois obligé d'appliquer à certains cas particuliers des propoſitions générales, d'où l'on tire ſouvent d'autres propoſitions dont la conſéquence eſt aiſée. Alors ces propoſitions ſe nomment *Corollaires.*

§. XXVI.

Dans les *Remarques* ou *Scholies*, on dit ce qu'il y a d'obſcur ; on répond aux choſes qui ſont douteuſes ; on indique l'uſage des Sciences, les ſources où l'on peut étudier les matieres, les Auteurs qui en ont traité ; enfin tout ce qu'il eſt bon, utile & agréable à ſçavoir.

§. XXVII.

Tout homme qui fera un peu d'attention à la méthode que nous venons d'expliquer, verra facilement qu'elle eſt univerſelle, & qu'on ne peut guere, ſans la ſuivre, parvenir à une ſolide connoiſſance des choſes. On lui a donné le nom de *Méthode Mathématique*, & même ſouvent celui de méthode *des Géométres*, parce que les Mathématiciens ont été juſqu'ici preſque les ſeuls qui l'ayent ſuivi ſcrupuleuſement.

§. XXVIII.

La méthode dont nous venons de parler étant ſi conforme au goût univerſel, & à la façon commune de raiſonner, eſt-il ſurprenant qu'on regarde les Mathématiques comme l'étude la plus propre à donner de l'ouverture à l'eſprit, & à former le jugement? On remarque dans ceux qui cultivent cette ſcience, une facilité & une promptitude étonnante à ſaiſir le vrai des autres ſciences auſquels ils s'appliquent dans la ſuite; pendant que tant d'autres qui d'ailleurs ont de l'eſprit, de la force d'imagination, du jugement même, ont tant de peine à en venir à bout; & cela parce qu'ils ne ſe ſont pas formés l'habitude d'un certain ordre & d'une certaine exactitude dans leurs jugemens.

§. XXIX.

Tous ceux qui employent donc tout leur tems à l'étude de certaines pratiques & de certaines ſciences qui ne ſont point partie des Mathémati-

ques ; mais qu'on regarde communément comme leur appartenantes, n'en retireront jamais tout le fruit qu'on peut ſe promettre de l'étude des Mathématiques. Car quoique ces ſortes de ſciences ſoient d'ailleurs fort utiles au commerce de la vie, elles ne ſeront jamais bien capables de leur donner cette force d'eſprit, cette vivacité, & cette habitude d'invention que l'on puiſe dans l'étude des véritables Mathématiques ; parce que tout cela eſt le fruit des méditations & des réflexions ſérieuſes que l'on fait ſur les démonſtrations.

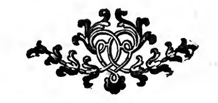
La *Méthode* eſt l'art de bien diſpoſer une ſuite de pluſieurs raiſonnemens, tant pour découvrir la vérité d'un Théorême, quand nous l'ignorons, que pour la démontrer aux autres, quand nous l'avons trouvée. Il y a deux méthodes générales pour rechercher les vérités dans les Mathématiques ; ſçavoir la *Synthèſe* & l'*Analiſe*. Celle dont on ſe ſert pour réſoudre un Problême mathématique ſe nomme *Zététique*, & celle qui détermine quand & par quelle raiſon, & en combien de façons un Problême peut ſe réſoudre, s'appelle *Poriſtique*.

La *Synthèſe* eſt l'art de chercher les vérités ou les démonſtrations, la poſſibilité ou l'impoſſibilité d'une propoſition, par des raiſonnemens tirés des principes ; c'eſt-à-dire, par des propoſitions qui ſe démontrent l'une par l'autre, en commençant par les plus ſimples, pour paſſer aux plus générales & plus compoſées, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la *Concluſion*, qui nous donne une connoiſſance claire & diſtincte de la vérité qu'on cherche.

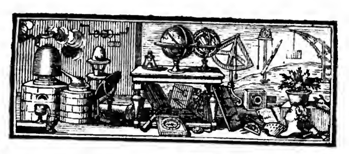
L'*Analyſe* eſt l'art de découvrir la vérité ou la fauſſeté, la poſſibilité ou l'impoſſibilité d'une pro-

poſition par un ordre contraire à celui qu'on ſuit dans la ſynthèſe ; ſçavoir en ſuppoſant la propoſition telle qu'elle eſt, & en examinant ce qui s'enſuit de-là, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à quelque vérité claire, ou à quelque impoſſibilité, dont ce qui a été propoſé ſoit une ſuite néceſſaire, pour conclure de-là la vérité ou l'impoſſibilité de la propoſition.

L'*hypothèſe* eſt une ſuppoſition de ce qui n'eſt pas pour ce qui peut être ; auſſi n'eſt-il pas néceſſaire que l'hypothèſe ſoit véritable, mais il ſuffit qu'elle ſoit poſſible. C'eſt pourquoi on peut faire pluſieurs hypothèſes différentes ſur un même ſujet.



ELEMENS



ELEMENS D'ARITHMETIQUE.

Definition premiere.

1. L'ARITME'TIQUE est la Science des nombres, ou l'Art de compter; c'est-à-dire, l'art de trouver certains nombres tirés de quelques-uns déja posés & connus, avec lesquels ils ont un certain rapport. S'il faut, par exemple, trouver un nombre égal à deux fois 6 & 8 joints ensemble.

Remarque.

2. On entend par le mot de *Science* la Méthode de raisonner conséquemment sur des principes certains, clairs & bien fondés.

Definition II.

3. Plusieurs unités de même espéce assemblées font ce que nous appellons un *Nombre*. Si, par

exemple, à un louis on ajoute un autre louis, on aura deux louis; si à ces deux on en ajoute encore un, on en aura trois; ainsi 2, 3, 4, &c. sont des Nombres.

Corollaire I.

4. Tout nombre suppose donc plusieurs unités; & l'on ne sçauroit faire la comparaison d'aucun nombre, s'il n'est composé d'unités de même espéce. Ainsi quand je dis 6, toutes les unités qui composent ce nombre, sont censées de même genre ou de même espéce, comme 6 chiens, 6 pommes, 4 maisons, 5 chapeaux, &c.

Corollaire II.

5. On appelle *nombre de même espece* ceux qui sont composés de mêmes unités. Un nombre devient plus grand, quand on lui ajoute des unités ou des nombres de même espéce: il diminue lorsqu'on lui en ôte. Les nombres ne souffrent point d'autres changemens.

Corollaire III.

6. On ne peut augmenter un nombre que de deux manieres; ou en lui en ajoutant de semblables à lui-même, ou plus grands ou plus petits que lui: comme si à 4 j'ajoute une fois, 2 fois, 3 fois 4, &c. ces nombres seront des nombres semblables à celui auquel je les ai ajouté. Si j'ajoute 6 à 4, ou 3 à 4, le premier est plus grand, le second plus petit que lui.

Corollaire IV.

7. Il est évident par la même raison, qu'on ne

peut diminuer un nombre que de deux manieres, en en retranchant une ou plusieurs fois un nombre moindre que lui, comme si de 12 je retranche une ou plusieurs fois 3 ; ou en lui ôtant tels autres nombres qu'on voudra, pourvû qu'ils soient plus petits que lui, comme 5, 4, 7, &c.

Remarque.

8. Il n'y a donc que quatre regles par le moyen desquelles on puisse faire une supputation exacte : *l'addition*, qui se fait en ajoutant deux ou plusieurs nombres ensemble, ou une unité à une autre unité : la *Multiplication* en ajoutant le même nombre plusieurs fois : la *Soustraction* en retranchant un ou plusieurs nombres d'un autre proposé, & la *Division*, lorsqu'on soustrait plusieurs fois le même nombre.

DEFINITION III.

9. *Ajouter*, c'est trouver un nombre dont la valeur soit égale à celle de plusieurs nombres de même espece joints ensemble. Ce nombre trouvé s'appelle *somme* ; & ceux dont on a composé la somme, se nomment *sommandes*, ou *nombres à réduire en somme.*

Corollaire.

10. Tout nombre étant composé d'unités (§. 3.) l'addition se fera en ajoutant successivement les unités des autres nombres à un nombre déja posé.

Remarque.

11. Lorsqu'on veut apprendre à faire l'addition, il faut d'abord compter les unités des nombres par les doigts, & répéter cette maniere de

compter jusques à ce qu'on se soit bien mis dans la tête combien fait un petit nombre joint à un nombre plus grand ou plus petit : par exemple, 2 & 3 font 5 ; 3 & 4 font 7 ; 8 & 6 font 14, &c.

DEFINITION IV.

12. *Soustraire*, c'est retrancher un petit nombre d'un plus grand de même espece, comme si de 9 je retranche 5, il reste 4. Ce reste se nomme *Reste*, *Excès* ou *Différence*, parce que la différence des deux nombres inégaux n'est autre chose que ce qui reste après l'opération. Ainsi soustraire, c'est trouver un nombre qui joint avec un nombre donné de même espéce, soit égal à un autre proposé : comme si de 9 on retranche 5, reste 4 ; ces cinq unités jointes avec les quatre qui restent après la Soustraction, font le nombre de 9 qu'on avoit proposé.

Corollaire.

13. Tout nombre étant donc composé d'unité, la Soustraction se fait, si des unités d'un nombre proposé on ôte successivement les unités de l'autre nombre donné.

Remarque.

14. On suppose que celui qui veut faire la Soustraction, sçait ôter d'un nombre les unités qu'il a sçu y ajouter. (§. 11.)

DEFINITION V.

15. *Multiplier*, c'est de deux nombres donnés en trouver un troisiéme qui renferme un des deux proposés autant de fois qu'il y a d'unités dans l'au-

tre, ce qui se fait en répétant un nombre autant de fois que celui qui le multiplie renferme d'unités. Lorsque, par exemple on multiplie 3 par 4, on prend 3 autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; c'est-à-dire 4 fois. Le nombre qu'on veut multiplier se nomme *Multiplicande*, & celui par lequel on le multiplie se nomme *Multiplicateur*. Ce qui résulte de la Multiplication, comme 12 de 3 multiplié par 4, 12 se nomme *Produit*.

Corollaire.

16. La Multiplication n'est donc qu'une addition réiterée d'un même nombre (§. 9.) autant de fois que le Multiplicateur contient d'unités.

Definition VI.

17. *Diviser*, c'est chercher un nombre qui m'indique combien de fois un tel nombre est contenu dans tel autre donné. Si je cherche par exemple, combien de fois 3 est renfermé dans 15, je trouve 5 fois; ce nombre 5 que je cherchois se nomme *Quotient* ou *Exposant*. Le premier des deux autres nombres 3 & 15, s'appelle *Diviseur*, le second 15, se nomme *Dividende*.

Corollaire I.

18. Diviser n'est donc autre chose que soustraire plusieurs fois un même nombre d'un autre plus grand de même espéce. (§. 12.)

Corollaire II.

19. Le nombre qu'on nomme *Diviseur* est donc renfermé autant de fois dans celui qu'on appelle *Dividende*, qu'il y a d'unités dans le Quotient.

Axiome I.

20. Chaque nombre, ou quantité, eſt égal à lui-même, comme un tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

Remarque.

21. Cet axiome eſt fort utile, parce qu'on peut conſiderer chaque nombre comme compoſé de plusieurs autres réunis ou diviſés. Par exemple, le nombre 6 peut venir de 4 & 2 réunis, de 3 multiplié par 2; de 8, en retranchant 2; & de 12 diviſé par 2. On voit donc que toutes ces manieres de compter donnent toujours le nombre 6.

Axiome II.

22. Deux nombres, quantités, ou telles autres choſes que ce puiſſe être, égales à une troiſiéme, ſont égales entre elles.

Remarque.

23. Pierre, par exemple, a deux chapeaux de même grandeur, même matiere, & même couleur que celui de Paul: les trois chapeaux ſont donc égaux, & par conſéquent les deux chapeaux de Pierre ſont égaux entre eux.

Axiome III.

24. Si à des choſes égales on ajoute choſes égales, les ſommes ſeront égales. Si à une choſe plus grande, ou à une plus petite, on ajoute choſes égales, la plus grande ſomme demeurera plus grande, & la plus petite reſtera plus petite; & ſi à des

choses inégales on ajoute des choses égales, elles resteront inégales.

Axiome IV.

25. Il en est de la Soustraction comme de l'addition; si des choses égales on retranche choses égales, les restes seront égaux. Si, par exemple, de deux bourses où il y a 20 louis, on en ôte dix de chacune, il en restera 10 dans chacune.

Axiome V.

26. Si on multiplie choses égales par choses égales, les produits seront égaux. Si vous multipliez choses inégales par choses égales, les produits seront inégaux.

Axiome VI.

27. Si vous divisez choses égales par choses égales, les quotients seront égaux. Si on divise des grandeurs inégales par des grandeurs égales, les grandeurs divisées demeureront inégales.

Corollaire.

28. Si deux personnes font le même calcul sans erreur, ils doivent trouver nécessairement la même chose. S'ils ne rencontrent pas de la même façon, il y a erreur dans le calcul de l'un des deux.

Axiome VII.

29. Un bâton de cinq pieds étant plus long qu'un bâton qui n'en a que 4, est par consequent plus long que tous ceux qui n'en ont que 4.

Axiome VIII.

30. Un tout est égal à toutes ses parties prises

ensemble, & plus grand que chacune en particulier.

Hypothése I.

31. En nombrant, on doit calculer par dixaines successivement d'un rang de chiffres à l'autre, exceptés les deniers qui se nombrent par 12.

Remarque.

32. Cette maniere de compter par dixaines est généralement reçue de tout le monde; elle est devenue comme une loi naturelle à tous les hommes, parce qu'ils s'y sont habitués dès la plus tendre jeunesse. La raison de cela, c'est, sans doute, qu'ils s'accoutument de compter par les doigts, quand ils ne sçavent pas encore la science du calcul. (§. 11.)

Corollaire.

33. Pour éviter la confusion & l'embarras, il a fallu donner un nom propre à chaque nombre de la premiere dixaine, & en assigner aussi de particuliers pour exprimer les dixaines entieres qui viennent ensuite. Ainsi un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, sont les noms donnés aux nombres de la premiere dixaine; & vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, &c. sont les noms de la seconde, troisiéme, quatriéme, cinquiéme, sixiéme dixaine.

Hypothése II.

34. De même que dix fois dix se nomment cent, dix fois cent se nomment mille; mille fois mille se nomment un million, &c. Quand on pousse le calcul plus loin, on employe les noms de milliars, billions, trillions, quatrillions, quintillions, &c.

Remarque.

35. On se sert de ces dénominations pour éviter l'obscurité & la confusion qui naîtroient infailliblement dans un calcul si étendu, & pour donner une idée claire & distincte de la valeur ou quantité que ces nombres expriment.

Hypothèse III.

36. On exprime les neuf nombres, desquels sont composés tous les autres, par les caracteres suivans 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ausquels on a aussi donné le nom de *Chiffres*. Pour exprimer les dixaines, centaines, mille, &c. on est convenu d'attribuer à ces caracteres une valeur qu'on peut appeller *valeur locale*, parce qu'elle dépend de l'ordre qu'on leur donne; de sorte qu'un caractere placé seul à la droite de celui qui fait le calcul, ne se prend que pour de simples unités: s'il est suivi d'un second à gauche, ce second exprime les dixaines, le troisiéme des centaines, le quatriéme des mille, &c. On est aussi convenu que cette figure (0) seroit une marque de nullité, & qu'elle rempliroit le vuide qui se trouve d'un nombre à un autre, quand ils ne se suivroient pas selon l'ordre naturel qu'on a établi entre eux. Ainsi pour marquer quatre cent soixante-huit, il faut écrire 468, & pour marquer quatre cent six, on écrira 406, où le zero occupe la place des nombres 1, 2, 3, 4, 5, qui sont exprimés par le seul caractere 6, & marque en même tems que depuis quatre cent jusqu'au nombre six, il n'y a point de dixaine.

Problême I.

37. Enoncer un certain nombre de chiffres pro-

posés, c'est-à-dire, assigner à chaque caractère la valeur qui lui est propre.

Solution.

1°. Il faut diviser en differentes tranches les chiffres proposés, trois par trois dans chacune, en commençant à droite sans déranger l'ordre qu'on leur a donné ; si à la fin des divisions il ne s'en trouvoit pas trois pour mettre dans la derniere tranche à gauche, il n'y faut mettre que ceux qui s'y trouveront.

2°. Le premier chiffre à droite de la troisiéme division doit être marqué d'un point. (.) Le premier de la cinquiéme sera marqué de deux, & le premier de la septiéme de trois, &c.

3°. C'est-à-dire qu'on marquera les millions par un point, les billions par deux, &c. Le premier chiffre qui est à droite dans chaque division, doit s'énoncer par unités, le second par dixaines, le troisiéme par centaines. Si, par exemple, on me proposoit d'énoncer la valeur de chacun des chiffres qui suivent selon l'ordre qu'ils ont.

2125473613578432597 écus.

Je les partagerois ainsi

2∴, 125, 473··, 613, 578·, 432, 597 écus, & puis les prenant à gauche selon leur valeur, je dirois, deux trillions, cent vingt-cinq mille quatre cent soixante-treize billions, six cent treize mille cinq cent soixante-dix-huit millions, quatre cent trente-deux mille cinq cent quatre-vingt dix-sept écus.

Démonstration.

La démonstration est évidente par les hypothéses établies cy-devant. (§. 31, 34, 36.)

Problême II.

38. Ajouter plusieurs nombres proposés.

Solution en forme de Régle.

1°. Rangez tous les nombres proposés de façon que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

2°. Tirez une ligne droite sous ces nombres, afin d'éviter la confusion.

3°. Commencez à faire l'addition des unités : si dans la somme de ces unités il y a des dixaines, & quelques nombres de plus, écrivez dessous les unités ce qui reste après les dixaines, que vous ajouterez à celles de la colonne voisine, en les additionnant comme les unités. Si dans la somme qui en provient il se trouve quelques centaines, il faut les réserver pour les additionner avec les centaines, & écrire le surplus au dessous des dixaines. La même régle doit se garder pour les centaines, &c.

Soit proposé l'exemple suivant.

45538	Fantassins.
3352	Carabiniers.
6341	Cavaliers.
867	Dragons.
95	Officiers Généraux.
56193.	

Commencez par la premiere colonne à droite, & dites 5 & 7 font 12 & 1 font 13 & 2 font 15 & 8 font 23, laquelle somme de 23 contient deux dixaines & trois unités : écrivez donc 3 sous la ligne des unités, & retenez deux dixaines, que vous joindrez à la colonne des dixaines qui suit,

& dites, 9 & 6 font 15 & 4 font 19 & 5 font 24 & 3 font 27 & 2 que vous avez retenu des unités font 29 : c'est-à-dire, 29 dixaines; vous poserez donc 9 sous la colonne des dixaines, & vous retiendrez 2 centaines que vous ajouterez à la colonne des centaines, en disant 8 & 3 font 11 & 3 font 14, & 5 font 19 & 2 que j'ai retenu font 21 : j'écris donc 1 sous les centaines, & je retiens 2 mille, que je transporte à la colonne des mille, & je dis, 6 & 3 font 9 & 5 font 14 & 2 que j'ai retenu font 16; j'écris donc 6 au dessous de la colonne des mille, & je retiens une dixaine de mille que je compte avec la colonne suivante, & je dis, 4 & 1 que j'ai retenu font 5 que je marque au dessous de la colonne que je viens d'additionner. Tous lesquels nombres réunis font la somme de 56193 hommes.

Demonstration.

Il est évident par l'opération que le nombre trouvé contient toutes les unités, toutes les dixaines, toutes les centaines, &c. c'est-à-dire, toutes les parties des nombres qu'on avoit proposé. Donc il est égal à tous ces nombres pris ensemble, (§. 30.) & en est en même tems la somme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

39. On doit faire attention que si l'on prend pour des unités toutes les parties des nombres proposés, il arrive qu'on ne retient que celles qui excédent 9 : car au lieu de marquer 15 au dessous de la colonne, on se contente de marquer 5 & de retenir 1; c'est-à-dire, une dixaine, lesquels deux nombres 1 & 5 considerés simplement comme uni-

tés, ne font que 6, qui est l'excédant de 9. De même au lieu d'écrire 16 au dessous de la colonne, on marque 6 seulement, & on retient 1, qui pris pour des unités ne font que 7, nombre excédant celui de 9 dans le nombre de 16.

Il est donc clair qu'on ne marque au dessous des colonnes, que les nombres qui sont plus petits ou plus grands que 9, ou qui sont précisement ce nombre, & qu'on transporte à la colonne suivante toutes les dixaines de la somme.

Il faut aussi observer, que si la somme des rangs exprime un nombre juste de dixaines, on doit poser le (0) au dessous de la colonne, & retenir le nombre des dixaines pour l'ajouter au rang suivant qui est vers la gauche; par exemple.

435.	
342.	
523.	
1300.	somme.
110.	preuve.

Je dirai donc 3 & 2 font 5 & 5 font 10 : je pose sous la colonne des unités (0) & je retiens (1) qui ajouté à 2 font 3 & 4 font 7 & 3 font dix; je pose (0) & je retiens (1) que je joins à la colonne suivante, 5 & 1 que j'ai retenu font 6 & 3 font 9 & 4 font 13 : je pose 3 & retiens 1 que je mets devant 3, parce qu'il n'y a plus de colonne à laquelle je puisse l'ajouter.

Remarque seconde.

40. Le meilleur moyen pour sçavoir si l'on ne s'est point trompé dans l'opération, c'est de refaire l'addition de bas en haut, si on l'a commencée de

haut en bas. On peut faire ce qu'on nomme la *Preuve* d'une autre maniere ; quoique celle-ci ſoit la plus ſimple & la moins embaraſſante, je mettrai encore la ſuivante.

Toutes les parties de l'Arithmétique ſe prouvent par leur contraire, & par conſequent l'addition par la ſouſtraction ; cette preuve tire ſon infallibilité de ce principe ; *ſi d'un tout on ôte toutes les parties il ne doit rien reſter* : c'eſt-à-dire, que le reſte doit être (o.)

Ainſi pour connoître ſi l'addition précédente eſt bien faite ; c'eſt-à-dire, ſi le nombre trouvé 1300 eſt la véritable ſomme de tous ceux qui ſont au-deſſus, on les ôtera de cette ſomme, en commençant par la premiere colonne à gauche, & diſant 4 & 3 font 7 & 5 font 12, qui retranchés du nombre 13, qui eſt au deſſous, reſte 1, qu'on écrira ſous le nombre 13, comme on le voit dans l'exemple cy-deſſus. Ce reſte 1 répréſentant la dixaine qui a été retenue dans l'addition, fait par conſéquent avec le zéro ſuivant le nombre de 10. Je paſſe à la ſeconde colonne & j'ajoute tous les nombres, en diſant, 3 & 4 font 7 & 2 font 9, qui oté de 10, il reſte 1 que j'écris au deſſous de (o.) Je repéte la même opération dans les colonnes ſuivantes vers la droite juſqu'à la derniere, où il reſte (o) qui fait connoître que l'addition a été bien faite, puiſqu'il eſt compté pour rien.

Remarque troiſiéme.

41. Les Mathématiciens ſe ſervent ordinairement de ce ſigne + pour marquer *l'addition* de deux choſes enſemble. Ce ſigne veut dire *Plus*. Quand ils veulent donc faire entendre qu'un nom-

bre eſt ajouté à l'autre, comme 7 à 3, ils l'expriment ainſi (3+7.)

Remarque quatriéme.

42. Quand les nombres n'ont point de dénomination particuliere, on les appelle *nombres ſimples* & *incomplexes* : mais lorſqu'ils marquent quelques grandeurs déterminées qui peuvent ſe diviſer en pluſieurs parties ou ſous eſpéces plus petites, on nomme ces quantités, *nombres complexes*. La *livre* de monnoye, par exemple, ſe diviſe en 20 parties qu'on appelle *ſols*, le ſol en 12 parties qu'on appelle *deniers*. Ces nombres ſont dits complexes, parce qu'ils ont une dénomination particuliere, dix ſols, dix deniers, dix livres ; ces nombres prennent une détermination arbitraire, parce que d'eux-même, ils ne ſignifient pas plutôt la quantité d'une choſe que d'une autre. Le nombre 15, par exemple, ne ſignifie pas plutôt 15 ſols que 15 deniers.

La même choſe arrive quand il s'agit d'autres grandeurs compoſées de ſous-eſpèces plus petites, comme la toiſe diviſée en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, &c. Quand il s'agit de faire des additions de cette nature, on doit commencer par la plus baſſe eſpéce ; c'eſt-à-dire, par les deniers dans le premier exemple, & par les lignes dans le ſecond. Lorſque l'on trouve aſſez de deniers pour faire le ſol, on le retient pour la colonne des ſols ; s'il s'en trouve plus ou moins, on poſe ce plus ou moins ſous la colonne des deniers, & l'on tranſporte les ſols comme j'ai dit cy-deſſus. On opere de la même maniere, pour les toiſes, pouces, lignes, &c., par exemple.

25 livres	14 fols	6 deniers.
33	12	9.
64	18	11.
124 liv.	6 f.	2 den.

Je dis, 26 deniers font 2 ſols & deux deniers : je poſe donc 2 deniers ſous la colonne des deniers, & tranſportant les 2 ſols à la colonne des ſols, je dis, 8 & 2 font 10, & 4 font 14, & 2 que j'ai retenu font 16 : je poſe 6 ſous la colonne des ſols, & je retiens une dixaine ; je paſſe à la colonne des dixaines, & je dis, 1 & 1 font 2, & 1 fait 3, & une retenue fait 4 ; & parceque quatre dixaines de ſols font juſtement 2 liv. je ne poſe rien, mais je tranſporte ces deux livres à la colonne des livres, en diſant, 4 & 3 font 7 & 5 font 12, & 2 que j'ai retenu font 14, je poſe donc ſous la colonne des livres l'excédant de dix, & j'ajoute ainſi à la colonne ſuivante cette dixaine que je retiens, & je continue, 6 & 3 font 9 & 2 font 11, & 1 que j'ai retenu fait 12 que je poſe, parce qu'il ne ſe trouve plus de colonne où je puiſſe tranſporter.

Problême III.

43. Souſtraire un petit nombre d'un plus grand.

Solution.

1°. Il faut écrire le plus petit nombre ſous le plus grand, avec la précaution de mettre les unités ſous les unités (§. 38.)

2°. On tirera une ligne ſous ces chiffres.

3°. Enſuite on ôte les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, &c. On écrira les reſtes ſous la ligne qu'on a tiré

ſous les chiffres, de maniere que les reſtes des unités ſoient ſous les unités, &c.

Si, par exemple, de cinq mille ſix cent ſoixante-quatre livres, je veux ſouſtraire trois mille quatre-cent cinquante-trois livres, j'opererai de la maniere qui ſuit.

5664
3453
2211

De 4 ôtez 3, reſte 1 que je mets ſous les unités; je paſſe aux dixaines; de 6 ôtez 5, reſte 1 que je poſe ſous les dixaines, ainſi de ſuite.

4°. S'il arrivoit que le chiffre qu'on veut ôter fût plus grand que celui duquel on veut le ſouſtraire, comme 6 de 4, il faut emprunter du chiffre voiſin à gauche une unité qui vaudra une dixaine (§. 36.) qui jointe à 4 fera 14, d'où on pourra facilement ôter 6. Soit donné, par exemple, quatre mille cinq cent quarante-deux écus dans une bourſe, j'en ôte deux mille trois cent cinquante-un; combien en reſtera-t-il?

4542
2351
2191

Je dis, 1 ôté de 2 reſte 1, que j'écris deſſous la ligne; je continue au chiffre ſuivant: 5 ôtés de 4, cela ne ſe peut, j'emprunte une dixaine du chiffre précédent à gauche, je joins cette dixaine à 4 qui pour lors vaut 14, dont ôtant cinq, reſte 9 que je poſe deſſous la ligne: je paſſe au chiffre ſuivant 5, duquel ayant emprunté 1, il ne vaut plus que 4: je dis donc, 3 ôtés de 4 reſte 1, que j'écris deſſous, & ainſi de ſuite.

5°. On trouve quelquefois des zeros; il faut dans ce cas emprunter une dixaine du premier chiffre positif à gauche, & opérer comme dans l'exemple suivant.

45030
32621
12409

De 0 ôtez 1, cela ne se peut, j'emprunte donc du 3 une unité qui vaut 10 : (§. 36.) si de 10 j'ôte 1, reste 9 : ensuite de 2 ôtez 2, il ne reste rien, je mets donc 0 qui exprime une nullité : (§. 36.) & comme le chiffre suivant se trouve un 0, j'opere comme au premier, en empruntant du chiffre voisin à gauche.

Quand on en trouve plusieurs de suite, on n'emprunte pas du chiffre positif autant d'unités qu'il y a de zeros ; on se contente d'en prendre une, mais tous les zeros, excepté le premier à droite, ne valent que 9.

EXEMPLE.

30002
12851
17151
30002 *preuve.*

Démonstration.

Par l'opération on voit que le nombre trouvé contient le reste de toutes les unités, de toutes les dixaines, &c. Or, comme le reste de toutes les parties ensemble est égal au reste total, si l'on ajoute ce reste au nombre qu'on a soustrait, ces deux nombres joints ensemble feront le nombre donné.

Remarque I.

44. Pour sçavoir si l'opération est juste, il faut ajouter le nombre trouvé à celui qu'on a ôté de l'autre.

Remarque II.

45. Le signe dont on est convenu pour marquer la Soustraction est — & s'exprime par *moins* : ainsi pour marquer la difference de 8 & 5, on écrit de cette maniere, 8 — 5 ; c'est-à-dire, 3 = 8 — 5.

Remarque III.

46. La Soustraction composée differe de la simple, en ce que la valeur des unités, qu'on emprunte des espéces plus grandes, n'est pas déterminée à 10, mais que cette unité empruntée a la même valeur qu'une unité de l'espéce plus grande qui la précéde à gauche.

Soit pour exemple,

Si de . . .	545 liv.	8 f.	8 den.
On retranche	323	9	9
Reste	221	18	11

Pour réussir il suffit de sçavoir le rapport des parties dont chaque espéce est composée, & se souvenir qu'il faut toujours avoir recours à la plus grande espéce qui précéde immédiatement, comme dans l'exemple cy-dessus, ne pouvant ôter 9 deniers de 8, j'ai emprunté un sol sur 8, qui par conséquent ne vaut plus que 7, duquel ne pouvant retrancher 9, j'ai emprunté une livre du rang des livres, &c. La preuve de la Soustraction composée se fait par l'addition comme celle de la Soustraction simple.

Problême IV.

47. Faire ce que l'on nomme *le quarré de Pithagore*, du nom de celui qu'on croît en être l'inventeur.

Solution.

On appelle communément ce quarré le *Livret*, c'est-à-dire, une table où les produits des 9 premiers chiffres multipliés par eux-mêmes, sont marqués.

1°. Faites un quarré dont vous partagerez chaque côté en 9 parties égales, & par chaque point de division vous tirerez des lignes paralleles à chacun des côtés, qui diviseront le grand quarré en plusieurs autres petits quarrés.

2°. On écrira dans chaque petit quarré de la premiere tranche horisontale du haut, les 9 premiers chiffres, en suivant leur ordre naturel; ce qu'on fera aussi dans les petits quarrés de la premiere tranche perpendiculaire à gauche.

3°. On ajoutera 2 à 2 qui font 4, & l'on placera ce 4 sous le 2 de la tranche horisontale, à la suite du 2 de la tranche perpendiculaire. A ce 4, si l'on ajoute 2, on aura 6 qu'on placera de suite, &c.

4°. En suivant la même méthode, on placera les autres chiffres dans les quarrés où ils doivent être, comme dans la troisiéme tranche, 3 ajoutés à 3, on aura 6, qu'on mettra à la suite de 3, sous le 4 de la seconde tranche horisontale, & les autres ainsi de suite.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Remarque.

48. Il faut ſçavoir cette table par cœur, où l'avoir devant les yeux quand on doit faire une multiplication ou une diviſion ; car lorſqu'on n'y eſt pas bien exercé, ces opérations en deviennent plus longues & plus difficiles.

Problême V.

49. Multiplier un nombre donné par un autre.

Solution en forme de Regle.

1°. Il faut écrire le nombre qui doit ſervir de Multiplicateur ſous celui qu'on veut multiplier, comme l'on fait dans l'addition (§. 38.) c'eſt ordinairement le plus petit ſous le plus grand.

2°. Tirez une ligne droite ſous les deux nombres.

3°. Avec le ſecours du Livret cy-deſſus, multipliez tous les chiffres du Multiplicande par chaque chiffre du Multiplicateur, obſervant toutefois de retenir les dixaines de chaque produit, pour les

ajouter au produit du chiffre voisin à gauche, & de reculer d'un rang vers la gauche le reste de chaque chiffre du Multiplicateur, afin que les dixaines se trouvent sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

4°. Ensuite on ajoutera tous ces produits particuliers (§. 38.) & leur somme sera le produit cherché.

Si, par exemple, on donne à multiplier

	38476	
par	35	
	192380	*Premier Produit.*
	115428	*Second Produit.*
	1346660	*Produit cherché.*

Vous direz, 5 fois 6 font 30, mettez 0 & retenez 3; dites ensuite, 5 fois 7 font 35 & 3 que j'ai retenu font 38: posez 8 en droite ligne à la gauche de 0 & retenez 3: puis, 5 fois 4 font 20 & 3 retenus font 23; mettez 3 devant 8; continuez ainsi jusqu'au dernier chiffre, & vous aurez le premier produit. Vous passerez au second chiffre 3 du Multiplicateur, en disant, 3 fois 6 font 18, vous poserez 8, mais en le reculant sous la colonne des dixaines, parce que le Multiplicateur 3 est au rang des dixaines; continuez à multiplier tous les autres chiffres du Multiplicande par ce 3 Multiplicateur, & la somme des deux produits vous donnera celui que vous cherchez.

Démonstration.

On voit par cette opération que le premier produit contient autant de fois le Multiplicande, que le premier chiffre du Multiplicateur renferme d'uni-

tés : & comme le second produit est reculé d'un rang vers la gauche, on doit raisonner du second chiffre Multiplicateur, comme on a raisonné du premier ; le nombre de dessus a donc été multiplié par celui de dessous. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

50. Si dans les nombres donnés il se trouve des zéros comme dans ces exemples,

	458	*à multiplier*	4860
par	150		200
			972000
	2290		
	458		
	68700		

On multipliera les chiffres positifs les uns par les autres, & l'on ajoutera tous les zéros du Multiplicande & du Multiplicateur à la fin du produit.

Ce signe × marque que deux chiffres sont multipliés l'un par l'autre ; ainsi 4×5, signifie que 4 est multiplié par 5 ; mais pour indiquer simplement une multiplication à faire, on se sert quelquefois d'un point seul, comme (3 . 4.) ce qui désigne le produit de 3 multiplié par 4. Cet autre signe = marque l'égalité qui se trouve entre deux quantités ; ainsi $4+5=9$, veut dire que 4 plus 5 est égal à 9.

La preuve de la Multiplication se fait par la division (§. 51.) car si l'on divise le produit total par un des deux nombres donnés, l'autre nombre naîtra de cette division. (§. 15. 17.)

Probléme VI.

51. Diviser un nombre donné par un autre.

I. CAS. Si le Diviſeur n'a qu'un ſeul caractere.

1°. On placera le diviſeur à gauche ſur le premier caractere du dividende. Si le caractere eſt moindre que celui du Diviſeur, on placera ce dernier ſur le ſuivant du Dividende. Faites enſuite un petit arc à côté pour placer le *Quotient* ; puis on cherchera combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le premier chiffre du Dividende, ſi celui-ci eſt plus grand ; ou dans les deux premiers, ſi le diviſeur a été placé ſur le ſecond ; & l'on marquera ce nombre de fois au quotient.

2°. On multipliera ce Quotient par le Diviſeur, & on ôtera le produit du, ou des chiffres diviſés du Dividende ; & s'il y a quelque reſte, on l'écrira au-deſſous.

3°. On abaiſſera à la droite de ce reſte le caractere ſuivant du Dividende, & l'on cherchera de nouveau combien de fois le Diviſeur y eſt contenu, & on l'écrira à la ſuite du chiffre du Quotient. Si dans la premiere Diviſion il ne s'étoit point trouvé de reſte, il ſuffiroit pour la ſeconde d'avancer le Diviſeur ſur le caractere ſuivant du Dividende, & puis on opere comme devant. Si l'on continue cette méthode pour tous les chiffres du Dividende, on aura le Quotient.

Soit donné pour exemple, le nombre 7854 à diviſer par 3.

Diviſeur	3 3	
Dividende	7854	(2618. *Quotient.*
	18	
	24	

Dites, 3 eſt contenu 2 fois dans 7, je mets 2 au Quotient ; je multiplie enſuite 2 par 3, & j'ai 6, qui ôtés de 7, il reſte 1 qu'on met au-deſſous

du Dividende : j'abaisse le second caractere du Dividende 8 à la droite du reste 1, ce qui fait 18 : je cherche de nouveau combien de fois 3 est contenu dans 18, je trouve 6, je pose donc 6 au Quotient à la suite de 2 : je multiplie 6 par trois, le produit est 18, qui ôtés de 18, il ne reste rien. J'avance donc le Diviseur sur le troisiéme caractere du Dividende 5, & je dis, en 5 combien de fois 3, je trouve 1 fois, je pose 1 au Quotient, & après avoir multiplié 1 par 3, le produit est 3, qui soustrait de 5 il reste 2, que je place au dessous de 5, & à côté duquel j'abaisse le caractere suivant du Dividende, ce qui fait 24, dans lequel nombre 3 est contenu 8 fois ; je mets donc 8 au Quotient, & après avoir multiplié 8 par 3, le produit est 24, qui retranché de 24, il ne reste rien : & comme il n'y a plus de chiffre à diviser, tout le Quotient est trouvé.

Démonstration.

On cherche dans cette opération combien de fois le Diviseur est contenu dans les mille, les centaines, & les dixaines, &c. Il est évident que le tout étant égal à toutes ses parties prises ensemble, le Quotient marquera cette quantité de fois (§ 30.)

II. CAS. Si le Diviseur est composé de plusieurs chiffres ou caracteres.

1°. On placera le premier chiffre du Diviseur sur le premier du Dividende à gauche, & les autres de suite sur ceux du Dividende vers la droite ; on fera ensuite un petit arc ou une ligne perpendiculaire. pour séparer le Dividende du Quotient.

2°. On cherchera combien de fois le premier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le premier du dividende, & on posera cette quantité de fois au quotient. (§. 47.)

3°. On multipliera ce Quotient par tous les chiffres du Diviseur, puis on examinera si l'on peut soustraire le produit des chiffres du Dividende placés au-dessous.

4°. Si la Soustraction peut se faire, on écrira le reste au-dessous, s'il y en a, après avoir mis le nombre au Quotient, & l'on effacera par une ligne transversale les chiffres dont on a fait la Division, afin de ne pas la faire deux fois. Si la Soustraction ne peut se faire, on diminuera le Quotient d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que le produit du Quotient par le Diviseur puisse être soustrait des chiffres qu'on a pris pour être le Dividende.

5°. On avancera le Diviseur d'une place vers la droite, ou on abaissera le caractere à diviser du Dividende à côté du reste de la Soustraction, s'il y en a, & ensuite on procédera comme devant, jusques à ce que le Diviseur soit au bout du Dividende.

6°. Si vous voulez faire la preuve de votre opération, multipliez tout le Quotient par le diviseur, & ajoutez au produit ce qui pourroit être de reste : de cette façon le produit sera égal au Dividende, si l'opération est bien faite. Soit pour exemple, 7856 à diviser par 32.

Diviseur	32	*Preuve*	245
Dividende	7856 (245		32
	64		490
	145		735
	128		7840
	176	*Reste*	16
	160	*Produit total égal au Dividende.*	
Reste	16		7856

Après avoir donc écrit 32 sur 78, dites : en 7 combien de fois 3, je trouve 2 ; multipliez 2 par 32, ce qui fait 64, & comme 64 peuvent être soustraits de 78, marquez 2 au Quotient, & l'excés au dessous de 78, abaissez 5 à la droite de 14 qui étoient restés, & dites, en 14 combien de fois 3 ? on trouve 4 fois, multipliez donc 4 par 32, le produit est 128, qui pouvant être retranchés de 145, je pose 4 au Quotient, & je mets 17, qui étoient de reste, au dessous de 145 ; j'abaisse ensuite 6 devant 17, ce qui donne 176 ; je dis donc, en 17 combien de fois 3 ? je trouve 5 ; je multiplie 5 par 32, le produit est 160, qui pouvant être ôtés de 176, je mets 5 au Quotient, & il me reste 16 que je place au dessous de 176, & l'opération est finie, parce qu'il n'y a plus de chiffres à diviser.

Remarque I.

Il est à propos de faire attention que pour trouver le Quotient, on partage quelquefois les caracteres du Dividende en plusieurs tranches, & puis on cherche combien de fois le Diviseur est contenu dans chacune ; cette méthode revient à l'autre, car il est facile de sçavoir par l'addition, combien de fois le Diviseur est contenu dans le tout, quand on sçait combien de fois il se trouve dans les parties.

Remarque II.

On trouve quelquefois des zéros dans le Dividende, quelquefois aussi dans le Diviseur ; un commençant n'étant pas peu embarassé dans ces caslà, voici deux exemples qui le mettront au fait. Je veux diviser 56034030 par 30 ; j'opere donc

ainsi par la méthode précedente. 3 en 5 se trouve 1 fois, 1 multiplié par 30 produit 30, qui soustraits de 56, restent 26, devant lequel j'abaisse 0; en 26 je trouve 3 huit fois; 30 fois 8 donnent 240, qui ôtés de 260, restent 20, j'abaisse 3, & je dis, en 20 combien de fois 3, je trouve 6, qui multipliés par 30 font 180, 180 retranchés de 203, restent 23, devant lesquels j'abaisse 4, & je dis, 3 en 23 se trouvent 7 fois, qui multipliés par 30, donnent 210, je retranche 210 de 234, restent 24, devant lesquels j'abaisse 0, & je dis, 3 en 24 se trouve 8 fois, dont le produit par 30 est 240, qui soustraits de 240, il ne reste rien; j'abaisse donc 3 devant 0, & je dis, 3 se trouve 1 fois dans 3, & 1 multiplié par 30 donne 30, qui soustraits de 30, reste 0, & l'opération est finie.

```
30
56034030 ( 1867801
30
260
240
  203
  180
   234
   210
    240
      03
       0
```

Toutes les fois que le Diviseur ne se trouve pas dans le Dividende, il faut mettre un zéro au Quotient, pour conserver aux chiffres suivans du Dividende le rang qui leur convient; & après avoir abaissé le caractere suivant devant celui qui ne contenoit pas le Diviseur, on procédera à la division des deux ou trois joints ensemble.

EXEMPLE.

```
6
156024(26004
36
--
00
--
02
--
24
--
0
```

Je dis donc, en 15 combien de fois 6 ? je l'y trouve 2 fois, j'écris 2 au Quotient, & multipliant le Diviseur 6 par le Quotient 2, ce qui fait 12, j'ôte 12 de 15, il reste 3, que je pose sous le premier caractere du Dividende, afin de pouvoir placer sous le Diviseur le troisiéme caractere du Dividende 6, que j'abaisse devant 3 qui étoit resté. Au lieu de 156, il ne me reste donc à diviser que 36; je dis donc, en 36 combien de fois 6 ? je l'y trouve 6 fois, j'écris donc 6 au Quotient, & après avoir multiplié 6 par 6, qui me donnent 36, je les soustrais des deux caracteres du Dividende 36; il ne me reste donc rien, c'est pourquoi je tire une ligne sous 36, & j'écris o sous le premier chiffre du Dividende, afin que le chiffre o du Dividende que je vais abaisser à côté de o, se trouve sous le Dividende; après avoir abaissé o devant o, je dis donc, en oo combien de fois 6 ? trouvant qu'il n'y est point, j'écris un zéro au Quotient, je multiplie le Diviseur 6 par o, ce qui donne o, je retranche ce produit o des deux o o du Dividende, & il me reste o; ainsi je tire une ligne sous les deux o o, & je mets o sous le premier caractere

du Dividende, pour la raison cy-dessus. J'abaisse ensuite le cinquiéme caractere 2 à la droite de 0 qui me reste; je dis donc, en 2 combien de fois 6? comme il ne s'y trouve pas seulement une fois, j'écris un 0 au Quotient, je multiplie 6 par 0, ce qui fait 0, & retranchant 0 de 2, il me reste 2 que j'écris encore sous le premier chiffre du Dividende, & j'abaisse le dernier chiffre du Dividende 4 devant 2; je dis donc, en 24 combien de fois 6? je l'y trouve 4 fois, j'écris 4 au Quotient, & multipliant 6 par 4, je trouve 24, qui soustraits de 24, il ne reste rien, non plus qu'au Dividende. La Division étant donc finie, le Quotient 26004 marque la quantité de fois que 6 est contenu dans 156024.

Il est à propos de pointer ou de barrer les caracteres du dividende à mesure qu'on les abaisse, pour marquer qu'on en a fait la Division.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du premier cas, il y a seulement à remarquer que comme on ne peut sçavoir par la table de Pythagore, combien de fois le Diviseur en son entier est contenu dans les chiffres du Dividende, il faut supposer qu'il y est contenu autant de fois que le premier chiffre à gauche du Diviseur est contenu de fois dans le premier, ou les deux premiers à gauche du Dividende. Quoique cette supposition puisse tromper quelquefois, il ne sçauroit pourtant y avoir de l'erreur, parce qu'en faisant la preuve tout de suite par la multiplication du Quotient par le Diviseur, le produit est comparé aux chiffres du Dividende. La preuve trouve sa propre preuve dans les défini-

tions de la Multiplication, (§. 15.) & de la Division. (§. 17.)

Remarque.

Jusqu'ici en suivant la méthode proposée pour l'arrangement des chiffres dans la Division, j'ai toujours mis le Diviseur sur le Dividende, afin d'avoir la commodité de mettre les restes au dessous; mais dans la suite j'ai suivi la méthode de M. Wolf, & j'ai placé le Diviseur au-dessous du Dividende, & les restes au-dessus.

DEFINITION VII.

52. Si l'on compare deux nombres (4 & 12,) de maniere qu'on cherche leur difference 8 par la Soustraction, on nomme ce rapport *Raison Arithmetique*; mais si l'on ne fait attention qu'au Quotient 3 trouvé par la Division, on nomme ce rapport *Raison Géometrique*. Le Quotient est donc *l'Exposant de la Raison Géométrique*.

DEFINITION VIII.

53. Lorsque la difference est la même entre deux ou plusieurs rapports arithmétiques, comme (3, 5 & 6, 8.) on dit qu'ils sont semblables, & que les rapports géométriques le sont aussi quand les Exposans sont les mêmes, comme (3, 12 & 5, 20) cette ressemblance de rapports est appellée *proportions*, & les rapports semblables sont nommés *rapports égaux*.

Remarque.

54. On écrit ainsi les nombres qui sont en proportion arithmétique (3. 5 ∴ 6. 8, ou plus communément 3—5=6—8; on écrit de cette maniere ceux qui sont en proportion géométrique (3.

12 :: 5 . 20, ou comme M. Leibnitz 3 : 12 = 5 : 20. Voici comme on énonce la premiere ; le premier est au second ce que le troisiéme est au quatriéme, comme si l'on disoit, 3 est à l'égard de 5 ce que 6 est à l'égard de 8, ou bien 5 surpasse 3, comme 8 surpasse 6. Dans le second cas, il faut s'exprimer ainsi, le premier nombre contient ou est contenu autant de fois dans le second, que le troisiéme contient ou est contenu dans le quatriéme ; ou bien 12 contient autant de fois 3, ou 3 est contenu autant de fois dans 12, que 5 l'est dans 20, ou que 20 contient de fois 5. On marque encore fort souvent ainsi la proportion Géométrique $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$, ce qui veut dire que 12 divisé par 3 est égal à 20 divisé par 5, parce que la ligne tirée entre les deux nombres est la marque de la Division.

Definition IX.

55. Quelquefois le second terme de la proportion est le même que le troisiéme, c'est-à-dire, qu'il exprime une même grandeur, qui pour lors sert de premier conséquent, & de second antécedent ; la proportion est alors nommée *proportion continue.* Quand elle est Arithmétique on l'exprime ainsi ; ÷ 3 6. 9. ou 3 — 6 = 6 — 9. Si la proportion est Géométrique, on écrit ∺ 3. 6. 12, ou 3 : 6 = 6 : 12.

Definition X.

56. Une suite de nombre qui sont en proportion soit Arithmétique, soit Géométrique, est appellée *Progression.* Ainsi 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27, est une progression Arithmétique, & 3. 6. 12. 24. 48. 96. est une progression Géométrique. On écrit aussi ces progressions de la maniere suivante

suivante, la premiere $a . b \therefore c . d$. ou $a , b \therefore c , d$. la Géométrique, $a . b :: c . d$: ou $a , b :: c , d$: ou encore $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Axiome IX.

57. Deux raisons égales à une troisiéme, sont égales entr'elles, comme $1 : 4 = 3 : 12$; & $1 : 4 = 5 : 20$. donc $3 : 12 = 5 : 20$.

Théorême I.

58. Si on multiplie les deux nombres 3 & 6 par le même nombre 4; les produits 12 & 24 sont en même raison que les nombres 3 & 6 qui sont multipliés.

Démonstration.

Si je multiplie 4 par 3 & par 6, on trouvera que 6 est contenu autant de fois dans le produit de la multiplication de 4 par 3, que le nombre 3 lui-même est contenu de fois dans 6 (§. 15) ainsi dans cet exemple, 6 étant le double de 3, il s'ensuit que la multiplication de 4 faite par 6 est le double de la multiplication de 4 par 3, & par conséquent il est clair que le produit 12 de 4 par 3, est autant de fois dans le produit 24 de 4 par 6, que le premier nombre 3 est dans 6, & 6 dans 12.

Corollaire.

59. Si l'on divise deux nombres par un même nombre, les quotiens sont en même raison que les nombres donnés à diviser: car pour lors ces derniers peuvent être regardés comme les produits des quotiens multipliés par le diviseur. (§ 15. 17.)

DEFINITION XI.

60. On nomme ***Fraction*** une quantité divisée en

parties égales, & dont on en prend une ou plusieurs.

Hipothése IV.

61. La fraction se marque par deux nombres mis l'un sur l'autre avec une petite ligne entre deux: comme $\frac{2}{3}$; le nombre écrit au dessus de la petite ligne, marque combien on prend de parties de l'entier, & se nomme le *Numerateur*; celui qui est dessous, indique en combien de parties égales l'entier est partagé, & se nomme le *Dénominateur*.

Corollaire I.

62. Le rapport qu'a le numérateur avec le dénominateur, détermine la grandeur de la fraction; car plus le numérateur contient de parties du dénominateur, plus la fraction est grande; ainsi la fraction $\frac{2}{5}$ est plus grande que celle-ci $\frac{3}{37}$ parce que la premiere contient 2 parties de cinq, au lieu que la seconde n'en contient que 3 de 37; mais lorsque un numérateur est contenu autant de fois dans son dénominateur, qu'un autre numérateur dans le sien, les fractions sont égales, comme $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{50}$. Si le numérateur est plus grand que son dénominateur, la fraction est plus grande que l'entier, comme $\frac{35}{24}$; car $\frac{24}{24}$ égale l'entier, & dans le cas de $\frac{35}{24}$ on a 11 de surplus.

Corollaire II.

63. Si donc le numérateur & le dénominateur d'une fraction, comme $\frac{4}{6}$ sont multipliés ou divisés par un même nombre, il en naîtra de nouvelles fractions égales entr'elles, parce que le numérateur 4 multiplié par 2 donne 8, & le dénominateur 6 multiplié par le même nombre 2 donne 12, d'où il naît deux nouvelles fractions, qui sont en

même raison; car ce que 4 est à 6, 8 l'est à 12. Donc $\frac{8}{12}$ & $\frac{2}{3}$ sont égaux à $\frac{4}{6}$ (§. 58. 59) parce que 8 sont les deux tiers de 12, comme 2 sont les deux tiers de 3, & 4 le sont de 6.

Problême VII.

64. Réduire ou trouver une fraction, qui quoique exprimée en des termes plus petits qu'une autre donnée $\frac{20}{48}$, lui soit néantmoins égale.

Solution en forme de regle.

Divisez tant le numérateur 20 que le dénominateur 48 de la fraction donnée par le même nombre 4; les quotiens 12 & 5 formeront la nouvelle fraction $\frac{5}{12}$, qui sera égale à la proposée; (§. 63.) car le numérateur & le dénominateur ayant été divisés par le même nombre, les Quotiens doivent être en même raison à leurs dividendes; & par conséquent quoique $\frac{5}{12}$ soient des termes plus petits que $\frac{20}{48}$, ce sera la même chose de partager l'entier en 48 parties, & en prendre 20, que de le partager en 12 dont on en prendra 5.

Problême VIII.

65. Réduire plusieurs fractions à la même dénomination, c'est-à-dire, donner le même dénominateur à plusieurs fractions, qui en avoient de differens, de maniere cependant qu'elles se trouvent égales aux fractions proposées.

Solution.

1°. Si l'on propose deux fractions, multipliez chacune dans son entier par le dénominateur de l'autre.

2°. Si l'on en propose plusieurs, multipliez le numerateur & le dénominateur de chacune par le produit des autres. (§. 63.)

Soit pour exemple,

I. CAS. $\frac{2}{3}$ seront multipliés par 5, qui est le dénominateur de la fraction suivante $\frac{4}{5}$, & les deux termes de celle-ci 4 & 5 seront multipliés par 3, dénominateur de la premiere fraction. $\frac{2}{3}$ donneront les produits $\frac{10}{15}$, & $\frac{4}{5}$ donneront ceux-ci $\frac{12}{15}$.

II. CAS. Multipliez $\frac{2}{3}$ par 24 produit de 4 par 6, qui sont les dénominateurs des deux fractions $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$, & vous aurez celle-ci $\frac{48}{72}$, puis $\frac{5}{6}$ par 12 produit des autres dénominateurs, & vous aurez $\frac{60}{72}$; enfin $\frac{3}{4}$ par 18 produit des deux autres dénominateurs, & vous aurez $\frac{54}{72}$.

I. CAS. $5)\frac{2}{3},\ 3)\frac{4}{5} = \frac{10}{15}, \frac{12}{15}$.

II. CAS. $24)\frac{2}{3},)\ 12.)\frac{5}{6},)\ 18)\frac{3}{4} = \frac{48}{72}, \frac{60}{72}, \frac{54}{72}$.

Problême IX.

66. Ajouter des fractions.

Solution qui sert de démonstration. Les dénominateurs ne servant qu'à indiquer (§. 61) en combien de parties l'entier est divisé, il suffit d'ajouter des numérateurs les uns aux autres comme $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$, est $\frac{5}{7}$, & ces trois $\frac{1}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}$, est $\frac{15}{9}$, ainsi des autres.

Mais comme on ne peut comparer deux nombres ensemble, s'ils ne sont de la même espéce (§. 4.) il faut premierement les réduire à la même dénomination (§. 65.) s'ils en ont de differentes : puis on ajoutera les numérateurs, & on écrira au dessous le dénominateur commun, par exemple $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$, en les réduisant à la même dénomination. Si on ajoute ensuite les deux numerateurs 10 & 12, on aura $\frac{22}{15} = 1 + \frac{7}{15}$ (§. 62.)

SECOND EXEMPLE.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}, = \frac{48}{72}, + \frac{12}{72} + \frac{54}{72} = \frac{114}{72} = 1\,\frac{42}{72} = 1\,\frac{7}{12}$ (§. 62. 64.)

Problême X.

67. Souſtraire une fraction d'une autre fraction.

Solution.

1°. Si les deux fractions ont des dénominateurs differens, reduiſez-les à la même dénomination. (§. 65.)

2°. Retranchez un numérateur d'un autre, & ce qui reſte s'écrira au deſſous du dénominateur commun.

Soit donné, par exemple, $\frac{2}{3}$, — $\frac{3}{7}$ à ſouſtraire; on les réduira à la même dénomination pour avoir $\frac{14}{21}$ & $\frac{9}{21}$, & on dira enſuite, 9 de 14 reſte 5, & on écrira $\frac{5}{21}$; on aura donc $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}$.

Démonſtration.

C'eſt la même que celle du problême précédent.

Problême XI.

68. Multiplier une fraction par une autre fraction.

Solution.

Multipliez les numérateurs l'un par l'autre, & les dénominateurs auſſi, quand même ils ſeroient différens; les produits donnent la nouvelle fraction que l'on cherche. Exemple, $\frac{2}{3}, \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$. Autre, $\frac{4}{5}, \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$.

Démonſtration.

Quand on veut multiplier une fraction par une autre, c'eſt plutôt la diminuer que l'augmenter, puiſqu'on cherche quelques unes de ſes parties par

la diviſion. (§. 15. 60.) car multiplier, par exemple, $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{7}$, c'eſt comme ſi on diſoit, je veux diviſer $\frac{4}{5}$ en ſept parties, deſquelles je veux prendre ou en avoir 3; (§. 61.) c'eſt-à-dire, diviſer $\frac{4}{5}$ par 7, & multiplier le quotient par 3, & comme le dénominateur ne fait qu'indiquer en combien de parties l'entier eſt partagé (§. cit.); il faut diviſer le numérateur de la fraction qu'on a à multiplier, par le dénominateur de l'autre. Pour pouvoir faire la diviſion, il faut, de la fraction à multiplier, en faire l'autre; ce dont on viendra à bout, ſi on la multiplie par le dénominateur du multiplicateur 7, (§. 63.) afin d'avoir $\frac{28}{35}$ au lieu de $\frac{4}{5}$, dont la ſeptiéme partie eſt $\frac{4}{5}$. Si l'on ajoute trois fois cette fraction, on aura $\frac{12}{15}$. Mais comme ce ſeroit tems perdu que de multiplier d'abord le numérateur 4 par le dénominateur 7, & de diviſer enſuite le produit par 7, il faut ſimplement multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, & le dénominateur 5 par le dénominateur 7 de l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

69. On ne doit pas être ſurpris que dans le cas cy-deſſus, le produit ſoit plus petit que ceux qui le produiſent, car ce que l'on y nomme multiplication, n'eſt en effet qu'une véritable diviſion, puiſque je ne cherche pas à augmenter les parties d'un entier; mais à le diviſer ou réduire en plus de parties qu'il n'étoit diviſé auparavant.

Remarque ſeconde.

70. Si on a une fraction à multiplier par un nombre entier, on ne doit multiplier que le numérateur de la fraction par ce nombre entier, parce que le dénominateur ne fait qu'indiquer en combien de

parties l'entier est partagé (§. 61.) comme $\frac{3}{7}$ par 2, on a $\frac{6}{7}$, car on n'a d'autre dessein que de doubler, tripler, &c. la fraction ; mais si on veut diviser la fraction, il faut multiplier le dénominateur ; c'est la méthode dont on s'est servi dans la démonstration.

Problême XII.

71. Diviser la fraction $\frac{4}{5}$ par une autre fraction $\frac{2}{3}$.

Solution.

1°. Du dénominateur faites le numérateur, & du numérateur le dénominateur, comme $\frac{2}{3}$ mettez $\frac{3}{2}$.

2°. Multipliez ensuite comme dans le problême précedent (§. 68.) & vous aurez le quotient $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$ (§. 62.) $= 1\frac{1}{9}$ (§. 64.)

Il faut toujours que les dénominateurs soient les mêmes ; s'ils ne l'étoient pas, il faut les réduire ; ensuite on divise le numérateur de la fraction à diviser par le numérateur de la fraction qui doit la diviser. Pour diviser $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$, on divise 8 par 4, & le quotient 2 fait voir que $\frac{8}{9}$ contient deux fois $\frac{4}{9}$.

Démonstration.

Diviser une fraction par une autre, c'est chercher combien de fois l'une est contenue dans l'autre (§. 17.) Si elles sont réduites à la même dénomination, l'une contient l'autre autant de fois que le numérateur de l'une contient de fois le numérateur de l'autre ; parce que dans cette comparaison on peut négliger le dénominateur commun (§. 61.) Or, lorsqu'on réduit deux fractions à la même dénomination, le numérateur de la premiere se forme de ce même numérateur multiplié par le dénominateur de la seconde, & le numérateur de la seconde est formé de ce même numérateur multiplié par le dénominateur de la premiere. (§. 65.) On trouve

donc par conséquent les nombres qui doivent se diviser l'un par l'autre, en multipliant le nouveau diviseur par la fraction à diviser. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Comme on peut diviser un entier en plusieurs parties, & en prendre quelques-unes pour faire une fraction, on peut aussi diviser une fraction en plusieurs parties égales ; ce qui fait une fraction de fraction : d'où l'on voit qu'une fraction n'a pas un rapport immédiat à l'entier, mais seulement à la fraction dont elle est partie ; le $\frac{1}{4}$ d'un $\frac{1}{5}$ n'est pas le quart de l'entier, mais d'un cinquiéme de l'entier dont il fait partie.

Pour opérer sur les fractions des fractions.

Il faut auparavant leur donner un rapport immédiat avec l'entier ; c'est-à-dire, les faire devenir simples fractions ; ce que l'on fait ainsi.

Soit la fraction de fraction $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de toise ; je multiplie les deux dénominateurs ensemble ; ce qui fait 12, & prenant 12 pour dénominateur, & 1 pour numérateur, je trouve la fraction $\frac{1}{12}$ de toise égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de toise ; ce qui est évident puisque la toise contenant quatre quarts, & chaque quart contenant 3 tiers, la toise doit par consequent contenir trois fois 4, ou 12 parties, telles que chacune soit le tiers de son quart ; & conséquemment chacune de ces parties est la 12 partie de la toise.

DEFINITION XII.

72. Si l'on multiplie un nombre quelconque (2) par lui-même ; le produit (4) s'appelle *Nombre quarré* ; & le nombre 2 à l'égard de ce produit se nomme *Racine quarrée.*

DEFINITION XIII.

73. Le nombre quarré 4 multiplié par ſa racine 2, donne le produit 8 qui s'appelle *Nombre cube*, & ſa racine 2 prend le nom de *Racine cubique* de ce même nombre.

DEFINITION XIV.

74. *Extraire la racine quarrée* d'un nombre, c'eſt trouver un nombre qui multiplié par lui-même, produiſe le nombre propoſé.

DEFINITION XV.

75. *On extrait la racine cubique* d'un nombre, quand on trouve un nombre, qui multiplié par ſon quarré, produiſe le nombre propoſé.

Remarque.

76. Pour extraire les racines quarrées & cubiques, il faut bien ſçavoir les nombres quarrés & cubes des neuf premiers chiffres.

Les voici.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	4[illegible]	64	81
Cubes.	1	8	27	64	125	216	34[illegible]	512	729

Avant de venir aux problêmes, & de proceder à leurs réſolutions, je crois qu'il eſt à propos d'expliquer un peu plus au long ce que c'eſt que ces racines quarrées & cubiques. Il ne ſuffit pas de ſçavoir que 1 eſt la racine quarrée de 1, que 2 eſt

celle de 4; 3 celle de 9, &c. Il faut de plus remarquer,

1°. Qu'un nombre qui n'a que deux figures n'en peut avoir qu'une en sa racine, d'où il est aisé de conclure qu'un nombre quarré a autant de figures dans sa racine quarrée, que de fois il est divisible de deux en deux figures; il peut arriver que la derniere tranche n'aura qu'une figure, sçavoir, quand leur nombre est impair, mais cela n'empêche pas que la racine quarrée n'ait autant de figures qu'il y a de tranches.

2°. On connoît que la racine quarrée d'un nombre composé de trois ou de quatre figures, a deux figures; que la racine quarrée d'un nombre composé de cinq ou de six figures en a trois, & ainsi des autres, en prenant la plus grande moitié du nombre des figures quand il est impair.

3°. Que le quarré d'un nombre au dessous de 9, ne peut avoir plus de deux figures, parce que 81 qui est le quarré de 9, n'en a pas davantage.

4°. Que le quarré des deux plus petits chiffres doit avoir trois figures, puisque 100 est le quarré de 10 qui sont les deux plus petits chiffres.

5°. Que les deux plus grands chiffres comme 99; ne peuvent avoir dans leur quarré plus de quatre figures; ou ce qui est la même chose, que quatre figures n'auront jamais pour racines que deux chiffres.

6°. Quand on multiplie un nombre composé de plusieurs figures, comme 162 par 162 pour avoir le quarré du même nombre, le premier caractere 1 se nomme *Premiere Racine*, le second caractere 6 se nomme *Seconde Racine*, le troisiéme caractere 2 se nomme *Troisiéme Racine*, & ainsi de suite. Si donc on multiplie un nombre composé de trois figures, comme 162 par 162,

le produit 26244 contient le quarré de la troisiéme racine par elle-même, puis le produit de la seconde par la troisiéme, & le produit de la premiere par cette même troisiéme. Ensuite le produit de la troisiéme & de la premiere par la seconde & son quarré, & de plus le produit de la seconde & de la troisiéme par la premiere avec son propre quarré.

Demonstration.

Multipliez	162
Par	162
Premier Produit	324
Second Produit	972
Troisiéme Produit	162
Enfin le Quarré	26244

Je dis, 2 fois 2 font 4, ce qui fait le quarré de la troisiéme racine; puis, 2 fois 6 font 12, c'est le produit de la seconde racine par la troisiéme, ensuite 2 fois 1 font 2, produit de la premiere par la troisiéme.

Je passe à la seconde racine, en disant, 6 fois 2 font 12, produit de la troisiéme racine par la seconde, puis 6 fois 6 font 36, c'est le quarré de la seconde par elle-même; ensuite 6 fois 1 font 6, c'est le produit de la seconde par la premiere.

Je viens à la premiere racine, en disant 1 fois 2 fait 2, produit de la troisiéme par la premiere, puis 1 fois 6 fait 6, produit encore de la seconde par la premiere; ensuite 1 fois 1 fait 1, c'est le quarré de cette premiere.

Lorsque le nombre n'est composé que de deux figures, la chose est plus claire, comme on le voit dans l'Exemple suivant.

Multipliez	32
Par	32
On trouve 1°	64
2°	96
Enfin le Quarré	1024

Je dis, 2 fois 2 font 4, ce qui fait le quarré de la feconde racine, puis 2 fois 3 font 6, ce qui fait le produit de la premiere racine par la feconde : enfuite 3 fois 2 font 6, ce qui donne un fecond produit de la feconde racine par la premiere ; enfin 3 fois 3 font 9, qui eft le quarré de la premiere.

On doit dire la même chofe de tous les autres nombres compofés, foit de deux, de trois, de quatre, de cinq figures, &c. car, comme nous l'avons vû ci-deffus, le quarré d'un nombre compofé de trois figures contient le quarré de la premiere racine, plus un produit fait du double de la premiere par la feconde, plus le quarré de la feconde, puis un produit fait du double des deux premieres racines par la troifiéme, enfuite le quarré de la troifiéme.

Le nombre eft-il compofé de quatre figures pour fa racine ? fon quarré doit renfermer tous les produits d'un nombre qui n'en a que trois, & de plus, un produit fait du double des trois premieres racines par la quatriéme, & encore le quarré de cette quatriéme par elle-même. Il en eft ainfi des autres nombres qui ont cinq, fix, &c. figures.

Problême XIII.

77. Extraire la racine quarrée de quelque nombre que ce foit.

Solution.

1°. Partagez par tranches les chiffres proposés : mettez-en deux dans chacune en commençant par la droite : s'il ne s'en trouve qu'un dans la derniere à gauche, n'en mettez qu'un, mais jamais trois dans aucune tranche ; le nombre des tranches donne le nombre des racines.

2°. Cherchez dans la table des racines le nombre quarré qui aproche le plus du nombre contenu dans la premiere tranche à gauche, duquel vous soustrairez ce quarré, & vous écrirez sa racine derriere un petit arc mis à côté du nombre donné, comme l'on met le quotient dans la division.

3°. Après avoir écrit le reste (s'il y en a) joignez à ce reste les chiffres de la seconde tranche qui doivent servir de dividende, puis doublez la racine trouvée, & divisez par le double de cette racine les chiffres à diviser, & le quotient qui en viendra sera la seconde racine, que vous marquerez à côté de la premiere.

4°. Ecrivez ce qui reste (s'il y en a) puis vous abaisserez à côté de ce reste le second chiffre de la même tranche, & ôtez de ces chiffres le quarré de la seconde racine.

5°. Continuez l'opération par la même méthode, si le nombre proposé a plus de deux tranches ; & par ce moyen vous aurez trouvé la racine quarrée du nombre donné. La preuve se fait en multipliant la racine par elle-même, car le produit doit être le nombre proposé.

Exemple.

Soit proposé 6789 dont il faut trouver la racine quarrée.

67|89 (82 *Racines.*
Quarré de 8 = 64
Reste... 3|8
16 *double de la premiere Racine* 8

Reste ... 6|9
Quarré de 2 = ... 4 *soustrait de* 69

Reste 65

Preuve

82
82
164

656
Reste... 65

6789

Les tranches étant faites, je vois que le nombre a deux racines (§. 77) je dis ensuite, le quarré qui approche le plus de 67 est 64, donc la racine est 8 : je pose 8 à la racine, je soustrais le quarré de 8 de 67, il reste 3, auquel je joins le chiffre 8 de la seconde tranche ; je divise ce nombre 38 par le double de la racine trouvée qui est 16, & le quotient 2 est la seconde racine ; il me reste 6, à côté duquel j'abaisse 9, & j'ôterai le quarré 4 de 69 ; il reste 65, parce que le nombre proposé n'est pas exactement quarré.

Pour donner un plus grand jour aux regles posées cy-dessus, soit l'opération suivante.

Soit le nombre **214369**, dont il faut extraire la quarrée.

21|43'69| *le même nombre partagé en tranches.*

1ere *Racine*	4	(463 *Racine quarrée.*	
Reste	5 43	*Preuve*	463
Double de la 1ere *Racine*	86 *Seconde Racine*		463
Reste	27,69		1389
Double des 2 1^eres *Racines*	9 2,3 *Troisiéme Racine*		2778
			1852
	000		214369

Après avoir disposé les chiffres en tranches, je cherche le plus grand quarré qui se trouve dans la premiere tranche à gauche, comme ici dans 21 je trouve 16 dont je prends la racine 4, je la mets sous 21, & au quotient je soustrais ensuite le quarré 16 de 21, il reste 5 que je pose au-dessous de la racine 4, après avoir tiré une ligne sous 4, puis devant 5, j'abaisse les deux chiffres de la seconde tranche, ce qui me donne 543 : je double ensuite la premiere racine, & je mets ce double 8 sous la pénultiéme figure de 543, observant, s'il y en a plusieurs, de mettre toujours la derniere figure à droite de ce double sous la pénultiéme cy-dessus. Puis je divise par ce double les deux premiers chiffres, disant ; en 54 combien de fois 8, je trouve 6 fois, je pose donc 6, qui est la seconde racine après 8, & je la mets aussi au quotient après la premiere. Il me reste 6, devant lequel j'abaisse la seconde figure 3 de la seconde tranche, ce qui me onne 63, j'en soustrais le quarré 36 de la seconde racine 6, il me reste 27, devant lequel nombre à droite j'abaisse les figures de la troisiéme tranche,

ensuite je divise 2769 par le double 92 des deux premieres racines 46, & je dis, en 27 combien de fois 9, je trouve 3 qui est la troisiéme racine que je mets au Quotient; & comme il ne reste rien, & que tous les chiffres ont été abaissés, je conclus que les trois racines trouvées sont la racine quarrée du nombre proposé.

Remarque I.

Si le nombre donné n'étoit pas exactement quarré, il faut ajouter le reste à la preuve faite par la multiplication pour avoir ce que l'on cherche.

Remarque II.

78. Lorsque le nombre proposé n'est pas exactement quarré, en ajoutant 2, 4, &c. chiffres à droite, on aura 10, 100, &c. parties pour continuer l'opération : car si on divise en 100 parties égales une unité du nombre quarré (ce qui se fait en la multipliant par 100) la racine sera divisée en dix parties : dans ce cas on reduit par la multiplication le nombre proposé en des especes plus basses, quand il y en a, & pour lors on peut négliger ce qui reste comme très-peu de chose, n'étant qu'une partie de l'espéce, & non de l'entier.

Soit par Exemple, à extraire la racine quarrée de 345, on opérera comme dans l'Exemple cy-joint.

```
3|45·          (18 57/100
1
-----
2|45
 28
224
-------
 2.1.|0.0.
  3 5 6
 ·1 8 2 5
----------
  2 7.5.|0.0
    3 7 0 7
  2 5 9 4 9
-----------
    1 5 5 1
```

Remarque III.

Si le nombre a plusieurs racines comme les précédents, il faut toujours doubler les racines trouvées pour servir de diviseur ; la premiere doublée sert pour la seconde tranche : le double de la premiere & de la seconde prises ensemble sert pour la troisiéme, &c. On soustrait ensuite le quarré de la nouvelle racine trouvée ; c'est la maniere ordinaire d'opérer. Quand quelques-unes des tranches ne donnent point de chiffres positifs pour racines, on met un zéro au quotient pour racine, & l'on passe à la tranche suivante.

Problême XIV.

79. Extraire la racine cubique d'un nombre donné.

Solution.

1°. Partagez par tranches les chiffres de trois en

trois en commençant par la droite, & vous aurez autant de chiffres dans la racine, que de tranches.

2°. Cherchez dans la table (§. 76.) le nombre cubique qui approche le plus de celui que renferme la premiere tranche, duquel vous le soustrairez: & vous mettrez au quotient la racine de ce nombre cubique.

3°. Ecrivez sous le premier caractere de la tranche suivante le triple du quarré de la premiere racine, comme diviseur, faites ensuite la division à l'ordinaire, & vous aurez la seconde racine.

4°. Multipliez le diviseur par le quotient, & écrivez dessous le produit qui en viendra; de façon que le dernier caractere à droite du produit du quarré triplé du nouveau quotient, multiplié par le quotient précédent, soit placé sous le second caractere de la même tranche, & sous la derniere à droite, le nombre cube de ladite racine. Faites enfin une somme de ces trois produits, que vous soustrairez des chiffres du nombre cubique écrit au-dessus.

5°. Faites la même opération pour les tranches suivantes, selon la troisiéme & la quatriéme régle, & vous trouverez la racine que vous cherchez.

EXEMPLE.

Soit le nombre donné 47437928 dont on veut extraire la racine cubique.

	47|437|928	(362 racines.
Nombre cubique	27 ::::::	
	20|437 :::	
Diviseur	27 ::::::	= 9×3 triple du □ de la 1re racine.
Produit du diviseur par le	162.. ...	Nouveau quotient.
Produit du triple du □ par le	324. ...	Premier quotient.
Nombre cube de la seconde	216 ...	Racine.
Somme des produits	19656 ...	
	781|928	
Diviseur	3888..	
Produit de la division par le	7776..	Nouveau quotient.
— du triple du □ par le	432.	Premier quotient.
Nombre cube du nouveau quotient	8	— ou de la troisiéme racine.
Somme des produits	781928	
	000 000	

Il faut remarquer que quand il y a plus de deux tranches, on opere à la troisiéme, en considerant les deux premieres racines, comme si elles n'en faisoient qu'une : à la troisiéme tranche on ne prend les trois racines que pour une seule, &c.

Remarque.

80. Si l'on divise en 1000 parties égales une unité dans le nombre cubique (ce qui se fait en la multipliant par 1000) la racine se divisera en dix parties (§. 73.) Si donc le nombre donné n'étoit pas précisément un nombre cubique, il faudroit lui ajouter à droite trois chiffres pour dix parties, & puis trois

pour cent parties, &c. ensuite on continuera l'opération selon les régles ordinaires.

Si, par Exemple, il falloit tirer la racine cubique de 3.

```
3 000000     (1 44/100
1 ...
2.000
  3..        Diviseur.
 12..
  48.
   64
1 744
 256.0.0.0
  588..
 2352..
   672.
     64
 241984
 1 4016
```

Veut-on voir si l'opération est bien faite ? on multipliera le nombre trouvé par lui-même, & le produit aussi. On ajoutera ensuite à ce second produit ce qui pourroit être resté ; & l'on connoîtra que l'opération est bien faite, si le nombre proposé se trouve dans la somme qui en viendra. (§. 75.)

Preuve. 144 *Racine.*

```
      144
      144
      ---
      576
     576
    144
    -----
    20736   Nombre quarré.
      144
    -----
    82944
   82944
  20736
  -------
  2985984
    14016
  -------
  3000000   Nombre cubique.
```

Théorême II.

81. Dans la proportion géométrique, le produit du premier terme par le quatriéme, est égal au produit du second par le troisiéme.

EXEMPLE.

$$3 . 6 :: 4 . 8$$
$$\quad 4 \quad 3$$
$$24 = 24$$

On voit clairement dans cet Exemple que 3×8 produit des extremes $= 24$, & que 6×4 produit des moyens $= 24$. La même chose arrive toutes les fois que les termes sont en proportion géométrique.

Démonstration.

Le second terme est égal au premier multiplié par l'exposant de la raison; le quatriéme est égal au

troisiéme multiplié par le même exposant (§. 53.) Dans l'exemple proposé, 2 est l'exposant de la raison ; parce qu'il déclare combien de fois 3 est contenu dans 6, & 4 dans 8. Comme 8 multiplicateur de 3 est le double de 4 multiplicateur de 6 qui n'est que le double de 3, il est évident que 3 multiplié par un multiplicateur double de celui de 6, doit donner un produit égal à celui de 6, & par conséquent $3 \times 8 = 24$, $6 \times 4 = 24$; donc les produits du premier terme par le quatriéme, & celui du second par le troisiéme sont égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

82. Si trois nombres sont en proportion, en sorte que celui du milieu serve pour deux, c'est-à-dire de premier conséquent & de second antécédent, ce qu'on nomme proportion continue, comme ∺ 4, 8, 16, le produit des extrêmes sera égal au quarré du moyen ; parce que la proportion est la même que celle-ci 4, 8 :: 8, 16 ; & comme $8 \times 8 = 64$ qui est son quarré, 4×16, produit aussi 64, donc $4 \times 16 = 64$ quarré du moyen. (§. 72.)

Théorême III.

83. Si quatre nombres ou quantités sont en proportion géométrique, la proportion sera toujours la même, malgré leur dérangement, comme le premier à la place du troisiéme, & le second à celle du quatriéme, &c.

Démonstration.

Le second terme est égal au premier multiplié par l'exposant de la raison, & le quatriéme est égal

au troisiéme multiplié par le même exposant (§. 53.) comme 2. 6 :: 3. 9. le second membre est donc au quatriéme ce que le premier est au troisiéme (§. 58.) & parce que dans la comparaison que l'on fait de l'un à l'autre, l'exposant de la raison reste toujours le même, la proportion ne change pas. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Les changemens dont il est parlé dans le théorême cy-dessus, peuvent se faire en sept manieres differentes, quand il s'agit seulement de la position des termes, où l'on verra qu'ils sont toujours en proportion géométrique, & que le produit des deux extrêmes sera toujours égal à celui des moyens. Il faut pourtant observer pour cela que les deux extrêmes soient toujours extrêmes, ou prennent la place des deux moyens, & que les moyens restent toujours moyens, ou deviennent tous deux extrêmes.

EXEMPLE.

	6. 2 :: 9. 3		6.3 = 2.9
1er.	6. 9 :: 2. 3.	*alternando*	6.3 = 9.2
2e.	2. 6 :: 3. 9.	*invertendo*	2.9 = 6.3
3e.	2. 3 :: 6. 9	. . . . .	2.9 = 3.6
4e.	3. 9 :: 2. 6	. . . . . .	3.6 = 9.2
5e.	9. 6 :: 3. 2	. . . . . .	9.2 = 6.3
6e.	3. 2 :: 9. 6	. . . . . .	3.6 = 2.9
7e.	9. 3 :: 6. 2	. . . . . .	9.2 = 6.3

Le premier changement se nomme *alternando*; parce que l'on compare les grandeurs alternativement, la premiere à la troisiéme, & la seconde à la quatriéme.

Le second se nomme *invertendo*, ou *permu-*

tando ; parce qu'on met les conséquens à la place des antécédens. Les autres n'ont d'autres noms que ceux qu'ils tirent de l'arrangement de leurs termes , ainsi dans le troisiéme on compare le premier conséquent au second , & le premier antécédent au second antécédent : dans le quatriéme on compare le second conséquent avec son antécédent, & le premier conséquent à son antécédent , &c.

On peut encore faire deux changemens sans ôter la proportion. Le premier se nomme *addendo* , parce qu'il se fait en ajoutant chaque conséquent à son antécédent, ou chaque antécédent à son conséquent, comme

$6.2 :: 9.3 \ldots\ldots\ldots 6.3 = 9.2$

1er. $6+2.2 :: 9+3.3 \,.\,.\, 6.3+2.3 = 2.9+2.3$

2e. $6-2.2 :: 9-3.3 \,.\,.\, 6.3-2.3 = 2.9-2.3$

3e. $6.6+2 :: 9.9+3 \,.\,.\, 6.9+6.3 = 6.9+2.9$

$6.6-2 :: 9.9-3 \,.\,.\, 6.9-6.3 = 6.9-2.9$

Le second changement se nomme *abstrahendo* ; parce qu'il se fait par la soustraction. Dans ces quatre exemples , le premier & le troisiéme qui se font *addendo* , se nomment aussi *componendo*, & le second & le quatriéme se nomment *dividendo*. Or quand on dit $6 + 2.2 :: 9 + 3.3$, ou $6 - 2.2 :: 9 - 3.3$, c'est-à-dire , le premier antécédent plus ou moins son conséquent, l'on nomme cela *convertendo*.

En général, soit qu'on ajoute ou qu'on retranche, soit qu'on multiplie ou qu'on divise quatre grandeurs , qui sont en proportion géométrique , pourvû que ce soit par des grandeurs qui soient en mêmes raisons, la proportion subsistera toujours : elle sera par conséquent aussi dans leurs quarrés , leurs cubes, leurs quatriémes puissances , &c. ou

leurs racines ſecondes, troiſiémes &c. Cette proportion ſe trouvera également dans leurs doubles, leurs triples, &c. leurs tiers, leurs quarts, &c. parce que quatre grandeurs étant en proportion, leurs parties le ſont auſſi.

Problême XV.

84. Entre deux nombres donnés 8 & 72, trouver un moyen proportionnel géométrique.

Solution.

1°. Multipliez les nombres donnés l'un par l'autre.

2°. Du produit 576, tirez la racine quarrée 24: (§. 77) ce nombre 24 ſera le moyen proportionnel que vous cherchez. (§. 82.)

Problême XVI.

85. Trois nombres étant donnés, 3, 12, 5; trouver un nombre proportionnel, ou à deux un troiſiéme.

Solution.

1°. Multipliez le ſecond 12, par le troiſiéme 5; diviſez le produit 60 par le premier nombre 3 : le quotient 20 eſt le quatriéme nombre proportionnel. (§. 81.)

2°. Dans le ſecond cas, multipliez le ſecond 12 par lui-même, le produit ſera 144, que vous diviſerez par le premier nombre 3; le quotient 48 ſera le troiſiéme proportionnel. (§. 82.)

Remarque premiere.

86. On appelle communément cette opération; *La Regle de Trois*, parce qu'elle eſt composée de

trois termes par le moyen desquels on en cherche un quatriéme. Elle est fort en usage tant dans la société & le commerce, que dans les Sciences. Elle n'a pourtant lieu que quand il s'agit des choses semblables exprimées par des nombres donnés, entre lesquels il y a de la proportion.

Soit proposé, par exemple, le problême suivant. Par un petit trou fait au fond d'un grand vase plein d'eau, il s'en écoule trois chopines dans l'espace d'une minute; on veut sçavoir combien il faut de tems pour qu'il s'en écoule 200. Dans ce cas il y a trois nombres, 3 chopines. 1 minute 200 chop. mais comme la quantité de l'eau qui s'écoule n'est pas proportionnelle au tems, parce qu'elle s'écoule plus vîte au commencement que dans la suite; il est évident que cette question ne peut se résoudre par la Regle de Trois.

Remarque seconde.

87. Il n'en est pas de même pour le commerce, les prix des choses sont censés proportionnels; car celui qui reçoit le double, le triple, &c. paye le double, le triple, &c. Le prix d'une certaine quantité de marchandises déterminées, une fois supposé, on trouve facilement par la Regle de trois, le prix de quelque quantité que ce soit de la même marchandise, ou la quantité qu'il faut de cette même marchandise pour quelqu'autre prix que ce puisse être. Soit donné l'exemple suivant, 4 pommes coutent 3 livres, combien aura-t-on de pommes pour 18 livres? il est évident qu'il doit y avoir autant de fois 3 liv. dans 18, qu'il faudra de fois 4 pommes pour la somme de 18 liv. c'est ce que l'on cherche, & que l'on trouve par la Regle de Trois qui suit.

$3^{\text{liv.}}$ — $18^{\text{liv.}}$ — 4^{pommes}

$$\frac{4}{72} \quad (24.\ pommes.$$

Car 18 multipliés par 4, le produit est 72, qui divisé par 3 donne le quotient 24; & ce quotient est le quatriéme nombre que l'on cherche. De même 4 aulnes d'étoffe se vendent 3 liv. combien 22 aulnes $\frac{2}{3}$ se vendront-elles ? Il est évident que 4 aulnes doivent se trouver autant de fois dans $22\frac{2}{3}$ que 3 liv. se trouvent dans le nombre que l'on cherche, & qui n'est autre que le quotient de l'opération de la Regle de Trois qui suit.

4^{aulnes} — $22\frac{2}{3}^{\text{d'aulnes}}$ — $3^{\text{liv.}}$

$$\frac{3}{68} \quad \begin{matrix} 2 \\ 68 \\ 44 \end{matrix} \quad (17^{\text{liv.}}$$

Je dis, 3 fois $\frac{2}{3}$ d'aulnes font deux aulnes que je mets à part; puis 3 fois deux aulnes font 6, & 2 que j'avois font 8 : je pose donc 8 au dessous de 3; je passe ensuite au second chiffre, en disant 3 fois 2 font 6, qui placés devant 8 font 68. Je divise 68 par le premier nombre 4, & j'ai le quotient 17 qui est le prix de 22 aulnes $\frac{2}{3}$.

L'opération sert elle-même de preuve à la Regle de Trois.

Remarque troisiéme.

88. On doit dire la même chose à l'égard des Ouvriers, dont la récompense est proportionnelle au tems qu'ils ont employé pour leur travail. La quantité même de l'ouvrage est proportionnelle au tems, s'ils font une égale quantité de besogne dans un

égal espace de tems. Elle l'est aussi à l'égard de chaque Ouvrier en particulier, si chacun finit la même tâche dans le même espace de tems. L'exemple suivant va le faire voir. Dans une heure de tems on peut lire 6 pages d'un livre : combien faudra-t-il de tems pour en lire 360 ?

$$6^{\text{pages}}\ 360^{\text{pages}}\ 1^{\text{heure}}$$
$$\frac{1}{360} \qquad 60^{\text{heures.}}$$

Remarque quatriéme.

89. Si les nombres donnés ne sont pas de la même espéce, n'ayant pas le même rapport avec les choses ausquelles ils répondent, il faudra les réduire à la même espece pour opérer par la Regle de Trois; ainsi, l'on réduira les livres en sols, les sols en deniers ; ou les toises en pieds, les pieds en pouces, &c. les heures en minutes, les minutes en secondes, &c. Un Ouvrier, par exemple, a fait son marché à 2 liv. 4 s. pour une toise $\frac{1}{2}$ d'ouvrage, combien gagnera-t-il s'il en fait 15 toises ? Je fais d'abord les réductions nécessaires, dans lesquelles je trouve 1°. qu'une toise $\frac{1}{2}$ est composée de 9 pieds, il faut ensuite que je cherche combien de fois on trouve 9 pieds dans 15 toises, je trouve 10 fois. Je trouve ensuite que 2 liv. 4 sols sont composées de 44 sols; il ne s'agira donc plus que de chercher combien dix fois 44 sols font de livres, je trouve 22 liv.: je dois donc conclure qu'il faut payer 22 liv. pour un ouvrage de 15 toises, à un ouvrier qui a fait marché à 2 liv. 4 sols par toise $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE.

1 toise ½	15 toises	2 liv.	4 sols.
6	6	20	
9 pieds	90 pieds	44 sols	
		10	
		440	20
			440 (22

Remarque cinquiéme.

90. Il arrive quelquefois que les fractions qui peuvent être de reste, demandent une division différente de celle qui est en usage; on cherchera dans ce cas une fraction qui équivale la fraction donnée, & dont le numérateur soit le même : le pied de Dijon, par exemple, est composé de 11 pouces 7 lignes, celui de Besançon, de 11 pouces 5 lignes, & le pied de Roi de 12 pouces. Pour réussir à faire une opération par la Regle de Trois, il faudra réduire les pieds en pouces, & les pouces en lignes, pour avoir de nouvelles fractions qui équivalent les fractions données.

Remarque sixiéme.

91. On trouve assez souvent la Regle de Trois *inverse* ou *indirecte* dans les livrets faits pour apprendre l'arithmétique; elle est pourtant inutile, si l'on prend la peine de placer les nombres selon que la proportion le demande. 125 Ouvriers, par exemple, finissent un ouvrage en 6 mois, combien faudra-t-il d'ouvriers pour le finir en deux mois? On voit sans peine que 2 mois sont contenus autant de fois dans 6, que la quantité des Ou-

vriers, qui finissent l'ouvrage en 6 mois, est contenue dans celle des Ouvriers qui le font en 2 mois. Car plus il y a d'Ouvriers qui travaillent, moins il faut de tems pour le perfectionner. On en sera convaincu en jettant les yeux sur l'opération suivante.

2 mois 6 mois 125 Ouvriers
6
11
750 (375 Ouvriers 750
222

Remarque septiéme.

92. On ne peut quelquefois venir à bout de trouver le nombre que l'on cherche, qu'en faisant deux applications de la Regle de Trois. On donne communément un nom particulier à cette opération ; les uns la nomment *Regle de Cinq*, les autres *Regle composée*.

Soit supposé cet exemple ; 300 écus rapportent 36 écus de rente tous les deux ans, combien vingt mille écus en rapporteront-ils dans l'espace de douze ans ? il faut premierement faire l'application suivante de la Regle de Trois.

300 écus 20000 écus 36 de rente
36
1 720000
720000 (2400 écus.
333300

Ensuite en faire une seconde pour sçavoir sur quel pied sera cette rente pendant 12 ans. La voici.

2 ans 12 ans 2400 écus
12
4800
24
28800

28800 / 22222 (14400 écus

Remarque huitiéme.

93. Une ſeule opération par la Regle de Trois peut ſuffire pour les exemples que je viens de rapporter ; pour en être convaincu, il faut ſeulement remarquer, que puiſque ſix cent écus rapportent la même rente par chaque année, que trois cent écus dans deux ans, & que 240000 en rapportent auſſi dans une ſeule année autant que 20000 dans douze ans. Sans s'embaraſſer de calculer les eſpaces du tems, il faut ſimplement s'y prendre ainſi. Deux fois 300, c'eſt-à-dire, 600 écus, donnent 36 écus de rente dans un an, combien douze fois 20000, c'eſt-à-dire, 240000 écus en rapporteront-ils dans le même eſpace de tems ?

300 écus 2 ans 20000 écus 12 ans 36 de rente
2 12
600 240000
36
1440000
72
8640000

22
8640000 / 666600 (14400 écus

Cette derniere méthode est préférable à l'autre ; parce que la premiere jette assez souvent dans des fractions ennuyeuses.

Remarque neuviéme.

REGLE DE COMPAGNIE ET DE SOCIETE'.

94. Il y a plusieurs occasions où l'on est obligé de réiterer plus d'une fois l'opération de la Régle de Trois. Trois personnes, par exemple, sont associées dans un commerce, de façon que chacun aura part au gain & à la perte, proportionnellement à ce qu'il aura mis pour le fond de la societé. Il faut dans ce cas faire la Regle de Trois autant de fois qu'il y a d'associés ; car comme celui qui met le double doit gagner ou perdre le double, &c. il en sera à son égard comme la somme de la mise totale l'est à chaque mise particuliere de la societé, & comme le gain ou la perte commune l'est au gain & à la perte particuliere de chacun.

Soit l'exemple suivant pour mettre la question dans tout son jour. Le gain que trois associés ont fait sur le fond de leur societé est de deux mille écus : le premier a mis 1000 écus, le second 500, le troisiéme 300. Cherchons donc le gain que chacun en particulier doit retirer, proportionnellement à ce qu'il a mis. Je le trouve dans les calculs suivans.

Mise

Mise du 1er. 1000 ^{écus}
—— *du 2e.* 500
—— *du 3e.* 300

Somme des trois mises. 1800

1800 ^{écus} 1000 ^{écus} 2000 ^{gain}
2 000
111 2000000
11111
2ØØØØOO (1111 $\frac{2}{18}$ ^{écus} *gain du premier.*
1888800
111

1800 ^{écus} 500 ^{écus} 2000 ^{gain}
2 000
111 1000000
888
1ØØØØOO (555 $\frac{10}{18}$ ^{écus} *gain du second.*
188800
11

1800 ^{écus} 300 ^{écus} 2000 ^{gain}
2 000
33 600000
3666
6ØØØOO (333 $\frac{6}{18}$ ^{écus}, *gain du troisiéme.*
188800
11

Preuve.

1111 $\frac{2}{18}$ *gain du premier.*
555 $\frac{10}{18}$ .... *du 2e.*
333 $\frac{6}{18}$ .... *du 3e.*

2000 ^{écus} *total du gain.*

Remarque dixieme.

RÉGLE D'ALLIAGE.

95. On se trouve dans la nécessité de réiterer la Regle de Trois dans diverses autres circonstances, comme dans la Médecine, la Pharmacie, & plusieurs arts & sciences, où d'une certaine quantité déterminée de choses d'espéces diférentes, il faut composer un mélange, dont les poids de ces choses soient proportionnés les uns aux autres, rélativement à leur force ou vertu connue. De trois simples, par exemple, qui entrent dans la composition d'un médicament, la dose de l'un est 4, de l'autre 5, & du troisiéme 2 onces, combien faudra-t-il de chacun pour faire un composé du poids de 8 livres? Opérez comme ici.

poids	*du* 1*er.*	4 *onces.*
	du 2*e.*	5
	du 3*e.*	2
	Total	11 *Onces.*

11 *Onces*	8 *liv.*	4 *Onces*
	16	
	128 *Onces*	1
	4	176
	512	512 (46 $\frac{6}{11}$ poids du premier simple.
		111
		1

Je prends d'abord le total, 11 onces des trois doses posées, & je place le premier à gauche; ensuite la quantité que je veux composer de mélange 8 liv. puis une des trois doses données: après cela je divise les livres en onces par la multiplication,

en disant, 6 fois 8, &c. j'écris ensuite le produit & je le multiplie par la doze 4 que j'avois placé à droite. Enfin je divise ce produit par le total des trois dozes, & le Quotient m'indique la quantité qu'il faut de la doze que j'avois supposé 4, pour former avec le quotient des deux autres opérations la quantité de 8 liv.

Il faut ensuite faire la même opération pour les deux autres dozes qui restent.

11 onces	128 onces	5 onces
	5	1
	640	192
		640 ($58 \frac{2}{11}$ poids du second simple.
		111
		1

11 onces	128 onces	2 onces
	2	33
	256	356 ($23 \frac{3}{11}$ poids du 3e. simple
		111

Preuve.

Poids du 1er. simple	$46 \frac{6}{11}$ onces
du 2e.	$58 \frac{2}{11}$
du 3e.	$23 \frac{3}{11}$
Poids du total du médicament	128 = 8 liv.

Il n'est pas hors de propos d'ajouter à la Régle cy-dessus la méthode qui suit; elle est d'un grand secours, lorsque plusieurs choses de même genre, mais différentes de valeur étant proposées pour faire un alliage, on veut trouver la quantité qu'il faut de chacune, pour composer un nombre de parties, qui soit d'une moyenne valeur. Personne n'ignore que

dans ce cas, il ne s'agit que d'avoir égard aux proportions que ces choses ont entr'elles ; mais la difficulté est de trouver cette proportion. En voici le secret.

On propose quatre lingots d'un même métal, mais différens de valeur par le différent degré de perfection qu'ils ont acquis par une plus grande purification. La livre pesant du plus parfait vaut 24 liv. de monnoye, la livre du second en vaut 23. Celle du troisiéme est estimée 18 francs, & celle du quatriéme n'est estimée que 15. Combien faut-il prendre des uns & des autres pour faire un alliage dont la livre pésant puisse valoir 20 liv. de monnoye ?

1°. Prenez deux à deux la différence de chaque titre de valeur à celui qui est moyen.

Comme de 23 à 20 = 3
Celle de 18 à 20 = 2

Prenez aussi la différence de 24 à 20 = 4
Celle de . . . . 15 à 20 = 5

2°. Pour marquer la quantité qu'on doit prendre de chaque lingot, donnez au plus haut titre de valeur la différence du moindre, & au plus bas la différence du plus haut. La somme de ces quantités déterminera le nombre des parties qui composent le titre moyen.

Multipliez par leur differences. { $2 \times 23 = 46$; $3 \times 18 = 54$ }
{ $4 \times 15 = 60$; $5 \times 24 = 120$ }

—*Prix moyen.*—

Somme $14 \times 20 = 280$

—— *Produit égal aux produits particuliers.*

La méthode est de prendre deux parties du métal au titre de la valeur de 23 liv., & 3 de celui qui est au titre de 18; ensuite 4 de celui qui est à 15, & 5 de celui qui est à 25. Ainsi la somme de toutes ces différences multipliées chacunes réciproquement par les différens prix, font une somme de 280, qui est égale à cette même somme multipliée par le prix moyen 20.

Les parties que l'on cherche pour composer l'alliage, doivent être entr'elles comme leur différence au prix moyen, de sorte que la partie qui en approche le plus, fournisse davantage que celle qui en approche le moins. D'ailleurs les produits des parties provenus de la multiplication de chaque quantité par son propre titre, doivent faire une somme égale au produit de la somme des différences, par le prix moyen : ce que l'opération a démontré.

Remarque onziéme.

96. On employe quelquefois certaines méthodes qu'on nomme *Pratiques Italiennes*. Voici les plus utiles. Trouver par la Regle de Trois un quatriéme nombre proportionnel à trois autres donnés. (§. 85) Si l'on divise deux nombres par le même nombre, les Quotiens sont en même raison que les nombres divisés (§. 59) : Divisez exactement, s'il est possible, le premier & le second, ou (§. 83) le premier & le troisiéme par un même nombre, & leur substituez leurs quotiens.

Remarque douziéme.

97. Si le premier ou le troisiéme nombre étoit 1, & que l'autre de ces deux ne fut pas trop grand, enfin que celui du milieu fût composé de différentes

espéces, sans qu'il soit besoin de faire la réduction marquée dans le (§. 89.) on fera le calcul de cette façon; je suppose que pour former la longueur d'une aulne, il faut 3 pieds 4 pouces & 6 lignes.

Aulne 1 3 pieds 4 pouces 6 lignes *combien* 5 aulnes

5

Je trouve 16 pieds 10 pouces 6 lignes

Remarque treiziéme.

98. Si deux nombres de même dénomination ne différent que d'une unité plus ou moins, on abrége tous les calculs par la méthode suivante. Supposez que la longueur de 5 toises est de 30 pieds, combien en faudra-t-il pour 4 toises?

5 toises 30 pieds 4 toises

Diviseur 5 24

Comme la différence de 5 à 4 n'est qu'une partie de moins, c'est-à-dire, un cinquiéme, divisez 30 par 5, & soustrayez le quotient 6 de 30: il reste 24 qui est le nombre cherché.

AUTRE EXEMPLE.

8 aulnes sont composées de 24 pieds, combien 9 aulnes? 9 n'excédant 8 que d'un huitiéme, divisez 24 par 8, & ajoutez le quotient 3 à 24. La somme 27 fera le nombre cherché.

Quelques-uns joignent aux Régles précédentes, celles d'une & de deux fausses positions: mais comme elles n'appartiennent pas à l'Arithmétique, nous ne les mettrons point ici. Il y a plusieurs autres Régles qui ne différent de celles que nous avons donné que par leurs noms, qu'elles ont pris de diverses

applications qu'on en a faites dans le commerce : & comme les noms ne changent pas l'essence des choses, on peut compter qu'on trouvera dans ce petit traité toutes les Régles de l'Arithmétique.

ARITHMETIQUE
Sans Chiffres, & rendue palpable,
par le Docteur SAUNDERSON.

C'EST une chose aussi merveilleuse que certaine, que le sçavant & ingénieux Docteur Saunderson, feu Professeur Lucasien pour les Mathématiques dans l'Université de Cambrigde, malgré son aveuglement, ait été capable cependant de faire des Calculs Arithmétiques & Algébriques fort longs & très compliqués. Cela paroît sans contradiction par son chef d'œuvre d'algébre qu'on vient d'imprimer, & par les autres monumens indubitables qui existent encore. Il avoit inventé pour son usage une façon de marquer très-commode pour les longs calculs & les nombres considérables, qu'il sçavoit exprimer sur une planchette, ou table à calculer, avec laquelle il pouvoit faire aisément toutes les opérations de l'Arithmétique, par le seul sens du toucher, ce qui fait que nous l'appellons *Arithmétique palpable.* Comme par le moyen de Madame Saunderson j'eus la facilité de voir & d'examiner divers modéles de cette espéce d'Arithmétique, qu'il avoit par bonheur perfectionné avant sa mort ; quoiqu'il n'eût laissé aucun éclaircissement là-dessus qui puisse servir à découvrir sa

méthode, j'ai cependant eu la curiosité de me proposer à moi-même de déchiffrer, pour ainsi dire, ses modeles ; heureusement j'en suis venu à bout. Comme d'autres pourroient avoir la même curiosité, & que d'ailleurs cette méthode peut être d'une grande utilité aux personnes qu'un pareil malheur mettroit dans le même cas, j'en donnerai une description exacte & succinte.

La table calculatoire étoit une planche d'un bois mince & poli, un peu plus grande qu'un pied en quarré, elle étoit élevée sur un petit chassis ou pied, de façon qu'on en pouvoit toucher également le dessus & le dessous. Cette planche étoit divisée par un grand nombre de lignes paralleles à égale distance, & par un pareil nombre d'autres faisant un angle droit avec les premieres. Les bords de cette table étoient divisés par des entailles, environ à la distance d'un demi pouce l'un de l'autre, & chaque entaille comprenoit cinq des paralleles susdites, de façon que chaque pouce quarré étoit divisé en cent petits quarrés. A chaque point d'intersection la planche étoit percée par de petits trous, capables de recevoir une épingle. C'étoit par le secours de ces épingles, fichées jusqu'à la tête dans ces trous, qu'il exprimoit ses nombres. Il employoit deux sortes d'épingles, des grosses & des petites, au moins leur tête étoit-elle différente, & pouvoit aisément se distinguer par le toucher. Toutes les pointes de ces épingles étoient coupées, & il en avoit une grande provision dans deux boëtes qu'il avoit toujours à côté de lui quand il calculoit : tels étoient ses instrumens, dont nous allons présentement faire voir l'usage.

Fig. 1re. Pour cet effet nous observerons d'abord que chaque figure numérale avoit sur cette table son

petit quarré particulier, consistant en quatre de ces petits quarrés contigus dont nous venons de parler, lesquels par conséquent laissoient un petit intervalle entre chaque figure, & ces figures numerales étoient de différente valeur, suivant la différente grosseur, ou la position d'une ou de deux épingles, dont elles étoient toujours composées. Dans cette intention il avoit imaginé l'analogie ou façon de marquer suivante, qu'il observoit toujours soigneusement.

Une grosse épingle dans le centre du quarré (elle ne se plaçoit jamais ailleurs que dans chaque centre) marquoit toujours un zéro, ou o; c'est pourquoi je l'appellerai doresnavant ainsi. Son principal employ étoit pour conserver l'ordre & l'égalité de distance entre chaque rang de chiffres. Ce zéro étoit toujours présent, excepté dans le seul cas de l'unité. Alors pour l'exprimer on ôtoit la grosse épingle du centre, & l'on y en substituoit une petite. Pour le 2, on remettoit d'abord le zéro à sa place, & l'on plaçoit la petite épingle précisement au-dessus du zéro. Pour le 3 le zéro restoit à sa place, & l'on avançoit la petite épingle à droite dans l'angle supérieur. Pour le 4, la petite épingle descendoit, & se plaçoit justement vis-à-vis le zéro à droite. Pour le 5 la petite épingle descendoit, & étoit placée à l'angle d'en bas, toujours à droite. Pour le 6, la petite épingle reculoit à gauche, & venoit se placer perpendiculairement sous le zéro. Pour le 7, la petite épingle reculoit encore à gauche, & se plaçoit dans l'angle inférieur. Pour le 8, la petite épingle remontoit, & se mettoit justement vis-à-vis le zéro à gauche. Pour le 9 enfin, la petite épingle remontoit encore, jusqu'à l'angle supérieur du zéro, toujours à gauche. C'est ainsi qu'il

Fig. 2.

arrangeoit ses chiffres par une façon de marquer uniforme & naturelle, qui pouvoit fort bien s'appercevoir & se distinguer au toucher, & pour faire comprendre plus distinctement l'arrangement de ces chiffres, je les ai representé dans la figure premiere & dans la seconde.

De cette maniere il pouvoit coucher par écrit (pour ainsi dire) sur sa table, quelque nombre que ce fût; & en promenant légerement ses doigts dessus, il pouvoit y lire aisement, & connoître ce qui y étoit représenté. Les grosses épingles ou zéro qui restoient toujours au centre de chaque quarré, assez proches & à égale distance les uns des autres, étoient des guides sûrs qui servoient à le conduire le long de chaque rang, en assuroient les limites, & prevenoient la confusion qui sans cela auroit pû survenir parmi les chiffres. Comme trois paralleles perpendiculaires suffisoient pour chaque chiffre, de même trois paralleles horisontales suffisoient pour un rang de chiffres, & les trois au dessous pour un autre rang, & ainsi de suite sans aucun danger de s'embrouiller.

Presentement il n'est pas difficile de concevoir comment il pouvoit avoir plusieurs rangs de chiffres en même tems sur sa table, l'un dessous l'autre, ou comment il pouvoit faire dériver un nombre d'un autre; en un mot, comment il pouvoit faire tous les calculs nécessaires, en changeant ses épingles de place, ce qu'il faisoit avec une adresse & une facilité si grande, que cela causoit une surprise agréable à ceux qui le regardoient. On dit même qu'il pouvoit quitter au milieu d'un calcul trop long, & s'y remettre quand il lui plaisoit; & qu'il en appercevoit tout d'un coup les conditions, en promenant les doigts sur sa table. Voici un expédient

fort naturel qui auroit pû lui abréger beaucoup ses opérations, surtout dans les grands calculs, c'est pourquoi je ne doute nullement qu'il n'y ait eu souvent recours. C'est de préparer sa table avant d'opérer, (ce qu'il pouvoit faire faire par tout autre que lui) en remplissant chaque troisiéme trou, de 3 en 3 lignes, avec une grosse épingle ou zéro; alors quand il vouloit travailler, il n'y avoit pas autre chose à faire que de déterminer chaque chiffre en ajoutant une petite épingle dans l'endroit convenable; il n'y avoit, (comme l'on a dit) que le seul cas de l'unité à exprimer, qui pouvoit l'obliger alors de changer la grosse épingle ou zéro, en une petite, pour marquer cette unité.

Les modéles de cette Arithmétique que j'ai examiné & reduit aux chiffres ordinaires, sont assurement des tables Arithmétiques qu'il avoit calculées, & qu'il conservoit pour son usage. Mais de sçavoir à quel dessein elles ont été faites, c'est ce qui n'est pas aisé de découvrir. Elles paroissent avoir beaucoup de rapport avec les tables des sinus naturels tangentes & secantes; mais je laisse aux recherches des curieux de trouver leur véritable usage. Ce sont quatre piéces d'un bois solide de la forme d'un parallelipipede rectangle, chacune longue environ de 11 pouces, de 5 & demi de large, & d'un peu plus d'un demi pouce d'épais. Les deux côtés opposés de chaque piéce étoient divisés par des petits quarrés, suivant la méthode de la table décrite cy-dessus, mais elles n'étoient trouées que dans les places nécessaires où les épingles étoient enfoncées à demeure jusqu'à la tête. Chaque face répréséntoit neuf petites tables arithmétiques de 10 rangs de chiffres chaque, & chaque rang de chiffres, pour l'ordinaire, contenoit cinq figures ou chiffres. Fig. 1.

Pour faire plaisir aux curieux, j'ai dessiné en grand une de ces petites tables, comme je l'ai trouvée, avec l'interprétation que je lui donne. Voyez la figure 3.

Mais outre l'usage arithmétique de cette table, qui étoit, sans contredit, sa premiere & sa principale destination, il s'en servoit encore pour décrire de fort belles figures géométriques, qui consistoient en plusieurs lignes droites qui s'entrecoupoient à divers endroits, comme j'en ai vû quelques exemples. Il avoit deux façons de les tracer, soit en mettant les épingles sur les lignes, pour en réprésenter la figure, soit par des épingles placées seulement aux interséctions de chaque ligne. Alors entortillant un brin de fil ou de soye autour de la tête de l'épingle, il pouvoit aisément représenter avec ce fil les lignes suivant son intention. S'il avoit aussi des lettres palpables, semblables à peu près aux caracteres d'imprimerie, pour distinguer les différens points angulaires, & pour lui aider dans la démonstration des propriétés de ces figures, c'est ce qu'on ne peut sçavoir à présent. S'il avoit eu besoin de pareils secours, son genie fertile y auroit aisément suppléé. Il n'est pas difficile de concevoir pareillement comment il pouvoit aussi se servir de la même table pour représenter toutes sortes d'équations algébriques, & pour réduire ces équations, principalement en se servant des caracteres dont je viens de parler, ou de quelque chose de semblable. Il pouvoit avoir des caracteres dans la façon de ces épingles, pour les signes ordinaires de l'algébre, & pour placer dans chaque opération. Ainsi cette table auroit ressemblé assez bien à une forme d'imprimerie, & je ne doute pas qu'il n'aye pû la lire par le seul toucher, pour peu qu'il eût voulu s'y appliquer. On

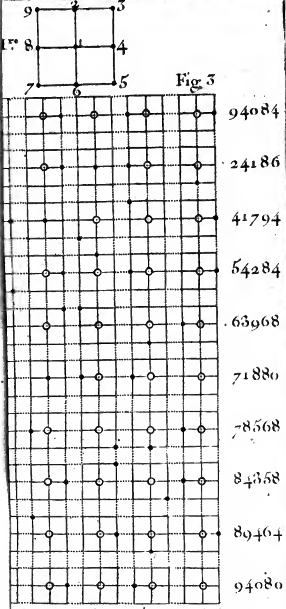
m'a assûré qu'il connoissoit ses lettres, & qu'il sçavoit épeler, de façon qu'il distinguoit les figures de chaque lettre, soit capitale, soit petite, & même qu'il s'amusoit quelquefois pour son plaisir, quand il en trouvoit l'occasion, à lire les épitaphes sur les tombeaux, avec ses doigts.

On l'a souvent entendu regretter de ne s'être point appliqué à apprendre à écrire dans sa jeunesse, & il assuroit qu'il auroit pû aisément y réussir. On ne trouvera plus ceci incroyable, quand on sçaura qu'on l'a vû souvent porter son jugement aussi certainement sur la bonté d'un instrument de Mathématique, & sur la justesse des divisions, en l'examinant seulement par le toucher, que les yeux les plus clairvoyans auroient pû le faire, jusques-là qu'on venoit ordinairement le consulter là-dessus. Enfin on ne peut plus douter qu'il ne fût capable de traiter toutes les espéces d'équations, & les calculs les plus compliqués avec beaucoup d'adresse & de capacité; mais je n'entreprendrai point de déterminer jusqu'à quel point il pouvoit se reposer sur la force de son imagination (qui certainement étoit bien grande) & comment il avoit recours aux inventions mécaniques à mesure qu'il en avoit besoin.

De tout ce que je viens de décrire, & de plusieurs autres ingénieuses inventions de pareille nature, que j'ai vû, je conclurai par cette observation générale, que comme la connoissance & l'usage des symboles (ou des signes sensibles & arbitraires de nos idées intellectuelles) est d'une grande importance, & a beaucoup d'étendue dans toutes les parties des Mathématiques : il avoit inventé de nouvelles espéces de symboles mathématiques, inconnus & inouis jusqu'à présent, qui s'accommodoient particulierement au besoin qu'il en avoit,

ſuivant les circonſtances. Les ſymboles ſenſibles communément reçus, & en uſage pour repréſenter les idées mathématiques, & pour les rapporter à notre imagination, ou à celles des autres, ſont derivés de nos deux ſens principaux, la vûe & l'ouie, & ſont (pour m'exprimer plus facilement) audibles ou viſibles. Il eſt vrai qu'il pouvoit faire uſage des premiers, & acquerir beaucoup de connoiſſances par leur moyen, en converſant avec les autres, & principalement en écoutant la lecture des meilleurs Auteurs en mathématiques; mais il étoit entierement privé du ſecours des derniers (je veux dire des ſymboles viſibles) dont cependant nous trouvons l'uſage ſi indiſpenſable & ſi néceſſaire, que c'eſt le ſeul moyen qui nous ſert à acquerir la plus grande partie de nos connoiſſances en mathématique.

Qu'a-t-il donc fait pour ſurmonter cet obſtacle qui nous paroît invincible, & pour ſatisfaire au déſir violent qu'il reſſentoit d'acquerir ces connoiſſances? il eut recours à un autre ſens qu'il poſſedoit parfaitement, & ſubſtitua le toucher à la place de la vue, en inventant une nouvelle eſpéce de ſimboles Mathématiques que nous pouvons appeller *palpables ou ſenſibles*. Il s'en ſervoit pour rapporter les idées Mathématiques à ſon entendement, puiſque l'entrée leur en étoit refuſée du côté des yeux. Ainſi par le moyen de ces ſymboles imparfaits & différens, ſuivant les béſoins qu'il en avoit, & par le ſecours d'une vive conception, & d'une perſévérance obſtinée, il fit des progrès admirables dans cette ſcience. Voilà les inſtrumens (ſi peu convenables en apparence) avec leſquels il rapportoit à ſon imagination les plus difficiles & les plus ſublimes idées des Mathématiques, & avec



lles grosses épingles qui servent d'indices ou de
sentent les petites épingles qui servent pour

Nº I

lesquels il s'étoit rendu capable d'en déduire les applications les plus convenables & les plus utiles.

Nous devons donc avouer de bonne foi, nous qui jouissons de la vue & de l'entendement, que tout ceci nous paroît bien extraordinaire & merveilleux. Pour moi je ne puis me le représenter durant le cours de toutes ses études, que comme un génie vraiment Mathématicien, qui se roidissoit contre les plus grands obstacles, & qui en se passant des secours ordinaires, que la nature lui avoit refusé, fit le plus rude aprentissage, capable de décourager tout autre que lui dans ses études. Mais par une heureuse sagacité & une industrie opiniâtre, à chaque difficulté qu'il rencontroit, il trouvoit des expédiens pour les surmonter. Il étoit résolu, non à abandonner leur poursuite, mais à persister avec constance jusqu'à ce qu'il devint supérieur à ces obstacles, pour satisfaire à l'ambition demesurée qu'il avoit de tenir le premier rang parmi les Mathématiciens.

Remarque.

M. Saunderson étoit originaire de la Province d'York; il eut le malheur de perdre entiérement la vûe par la petite verole, à l'âge d'un an. Malgré cet accident, il vint à bout par la force de son génie, de faire des progrès si étonnans dans les Mathématiques, qu'on le trouva digne d'occuper la chaire de Professeur de Mathématiques dans l'Université de Cambrigde. Il a composé des Elémens d'Algébre en Anglois, en deux volumes in-4°, qui y furent imprimés en 1741, quelques années après sa mort, aux dépens de l'Université. Ce petit traité d'*Arithmétique palpable*, qui en est extrait, est écrit par le Professeur qui lui succeda, & qui fut chargé de l'édition de son Ouvrage.



ELEMENS D'ALGEBRE.



'ALGEBRE ne diminue pas ordinairement la longueur du calcul, mais elle fait découvrir les voyes du calcul que l'Arithmétique n'enseignoit pas.

Les difficultés que l'on trouve à résoudre grand nombre de questions & de problêmes concernant les nombres, lorsqu'on veut se servir des régles ordinaires de l'arithmétique, ont fait chercher une autre méthode, qui par les principes les plus simples mît en état de découvrir ce que l'on cherche, sans fatiguer trop l'esprit.

Les principes de cette science ont été dans tous les tems très-simples & naturels ; mais les dénominations barbares & la maniere obscure & embarassée faisoient que peu de personnes s'y appliquoient. M. Descartes vint heureusement au secours, & la rendit beaucoup plus facile & plus parfaite, comme on peut le voir dans ce petit abrégé.

DEFINITION I.

1. L'*Algébre* est la science de trouver, par le

secours

ſecours des équations, des quantités qui ayent certaines rélations avec d'autres connues & propoſées.

Remarque.

2. Je veux trouver, par exemple, deux nombres, qui multipliés l'un par l'autre, donnent 60 pour produit, & qui ſimplement ajoutés faſſent la ſomme 17. Voilà deux nombres propoſés dans leſquels il faut que j'en trouve deux autres dont je n'ai d'autres connoiſſances, ſinon que leur produit doit être égal au plus grand, & leur ſomme au plus petit.

L'algébre me donnera le moyen de les trouver, & non-ſeulement pour ce cas-là ; mais elle me fournit des régles générales pour réſoudre tous les autres de cette eſpéce, auſſi-bien que les problêmes de calcul qu'on pourroit me propoſer.

DEFINITION II.

3. L'*Arithmétique ſpécieuſe* eſt celle qui dans les calculs, employe des ſignes au lieu de chiffres, & avec leſquels l'algébre fait les mêmes opérations que l'arithmétique, & beaucoup d'autres que cette derniere ne ſçauroit faire.

DEFINITION III.

4. On nomme *Quantité*, tout ce que l'eſprit conçoit comme ſuſceptible d'augmentation ou de diminution.

Hypothéſe I.

5. On eſt convenu de repréſenter les quantités connues par les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, &c. & de marquer les quantités inconnues par ces dernieres x, y, z.

Hypothése II.

6. Les lettres de l'alphabet, n'ayant pas comme les chiffres de l'arithmétique, une valeur déterminée, on pouvoit bien ſuppoſer que la lettre a, ou la lettre b repréſente un nombre tantôt plus grand, tantôt plus petit; mais comme ces ſuppoſitions auroient été fort embaraſſantes, ſurtout dans un calcul un peu long, on eſt convenu des ſignes ſuivans. Le ſigne de l'addition eſt $+$ & s'exprime par *plus*; celui de la ſouſtraction eſt $-$ & s'exprime par *moins*.

Remarque.

7. Quand je voudrai, par exemple, repréſenter la ſomme des deux quantités exprimée par a & b, j'écrirai $a+b$; c'eſt-à-dire, que b eſt ajouté à a, & je dirai a *plus* b, de ſorte que ſi la valeur de a eſt 6, & celle de b 4, cette expreſſion $a+b$ ou $6+4$ ſignifie 10. La différence de deux quantités s'écrit ainſi $a-b$, comme ſi je diſois que la grandeur b eſt ſouſtraite de la grandeur a, & je dirai a *moins* b: de maniere que ſi la valeur de a eſt 5, & celle de b 4, cette expreſſion $a-b$, ou $5-4$ ſignifie 1, parce que 4 ôtés de 5, il reſte 1; de même $a>b$ ſignifie que a eſt plus grand que b, & $a<b$, veut dire que a eſt plus petit. Toute grandeur qui n'eſt précédée d'aucun ſigne, eſt cenſée poſitive, a ou $+a$, c'eſt la même choſe, & l'on appelle grandeurs ſemblables a & a, de même b & b; & grandeurs différentes a & b, ou c & d.

Hypothèſe III.

8. On ſe ſert communément de ce ſigne $\times$ pour

marquer une multiplication à faire ; quand on la veut faire effectivement, on se contente de les joindre, ou bien on les marque par une virgule (,) ou un point (.)

Remarque.

9. Si je veux multiplier a par b, j'écris le produit ainsi, ab, ou $a.b$, ou $a \times b$, mais je ne me servirai point de ce dernier signe $\times$.

Hypothèse IV.

10. Veut-on indiquer la multiplication de plusieurs quantités ou grandeurs ensemble par une autre, on renferme en parenthèse toutes les grandeurs qui doivent servir de multiplicande, & l'on met après la parenthèse avec, ou sans signe, ou une virgule entre deux, celle qui doit servir de multiplicateur.

Remarque.

11. Ecrivez le produit de $a+b-c$ par d, ou $[a+b-c]d$, ou $d[a+b-c]$, ou de cette manière $\overline{a+b-c}, d$. Ordinairement on l'écrit ainsi $\overline{a+b-c} \times d$, ou bien $d \times \overline{a+b-c}$.

Hypothèse V.

12. Le signe de la division se marque par deux points (:) ou par une ligne tirée entre les grandeurs qu'on doit diviser & celles qui doivent servir de diviseur, comme dans les fractions.

Remarque.

13. Quand on doit diviser a par b, on écris

pour le quotient, ou $a : b$, ou $\frac{a}{b}$, l'un & l'autre veut dire que a est divisé par b.

Hypothèse VI.

14. Quand on divise plusieurs grandeurs par une seule, ou une seule par plusieurs, on renferme toutes ces grandeurs ou quantités entre deux crochets comme dans la multiplication, ou l'on met seulement une virgule.

Remarque I.

15. Supposons que j'ai à diviser $a+b$ par c, je marquerai le quotient par $[a+b] : c$, ou par $\overline{a+b} : c$. Lorsque je veux diviser a par $b+c$, je le marquerai ainsi, $a : (b+c)$ ou $a : \overline{b+c}$. Enfin si $a+b$ par $c+d$, j'écris $(a+b) : c+d$, ou $\overline{a+b} : c+d$. Plus communément de cette maniere $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, ou bien encore $\overline{a+b} : c$, ou $a : \overline{b+c}$, $\overline{a+b} : c+d$.

Quand on veut représenter deux grandeurs égales, on se sert de ce signe $=$, c'est-à-dire, que la grandeur qui est à gauche est égale à celle qui est à droite. $a=b$ marque que a est égal à b; $ab=cd$, signifie que le produit de a par b est égal à celui de c par d; $a+b=c+d$, signifie que la somme des grandeurs, a, b, est égale à la somme des grandeurs c, d, & ainsi des autres. Quelques auteurs, comme le pere Lami, ont employé le signe $\propto$ ou ∞ au lieu du signe $=$; mais ce dernier est aujourd'hui le plus en usage.

Des grandeurs sont nommées *complexes* quand elles sont jointes par le signe $+$ ou $-$, par exemple,

$a+b$, ou $c-d+f$, font dites *grandeurs complexes.*

Remarque II.

Il y a des grandeurs *positives* & d'autres *négatives.* On appelle *positives* celles qui sont précédées du signe $+$ comme $+a$, $+b$; les grandeurs négatives sont celles qui sont précédées du signe $-$ comme $-a$, $-b$. Cette dénomination n'empêche pas qu'elles ne soient aussi réelles que les positives. $-a$, & $+a$ sont deux grandeurs égales, mais dans un sens opposé, ce qui rend cette distinction réelle & non pas arbitraire. Deux Voyageurs, par exemple, font chacun 6 lieues, l'un à l'Orient, l'autre à l'Occident; je dirige mon intention du côté de l'Orient, celui qui aura pris cette route aura fait $+6$ lieues, tandis que celui qui a pris un chemin opposé, aura aussi fait -6 lieues: Les distances parcourues sont égales entre elles, mais prises dans un sens dont les signes $+$ & $-$ marquent l'opposition. Ainsi lorsque deux grandeurs semblables se rencontrent ensemble, & que l'une est positive & l'autre négative, elles se détruisent mutuellement, & cette opposition la rend égale à zéro, c'est pourquoi $+a-a=0$.

Remarque III.

Par le mot de *grandeur* en général, on entend tout ce qui peut s'augmenter ou se diminuer, & qui par conséquent a des parties. (§. 4.) Il y en a de deux sortes, l'une *successive*, dont les parties se succedent, & n'existent jamais toutes à la fois; telle est la durée du tems. L'autre se nomme *permanente*, dont les parties existent en même tems. Celle-ci se divise en *discrete*, dont les parties ne sont pas liées,

comme ſont les nombres, & tous les aſſemblages dont la continuité ou la liaiſon des parties n'eſt pas abſolument néceſſaire.

L'autre prend le nom de grandeur *continue*, dont les parties ont une étroite liaiſon, telles que ſont toutes les choſes matérielles.

On donne le nom de grandeur *complexe* à celle qui eſt compoſée de pluſieurs autres, entre leſquelles ſe trouvent le ſigne $+$, ou le ſigne $-$; ainſi $a+b$ eſt une grandeur complexe, de même que $a+b-c$; mais ab, quoique formée par deux grandeurs, n'eſt pas une grandeur complexe, parce qu'il ne ſe trouve entre-elles ni le ſigne $+$ ni le ſigne $-$.

La grandeur *incomplexe* eſt celle qui n'eſt liée avec aucune autre par les ſignes $+$ ou $-$. Ainſi a, de même que ab, ſont des grandeurs incomplexes.

Problême I.

16. Ajouter des grandeurs de même eſpéce, marquées par les mêmes ſignes ou par de différens.

Solution en forme de Regle.

1°. Faites l'addition de celles qui ont le même ſigne, & la même lettre, comme elle ſe fait dans l'arithmétique.

2°. Otez la plus petite quantité de la plus grande dans celles qui ont des ſignes différens, & marquez l'excès ou la différence avec le ſigne de la plus grande.

3°. Si les grandeurs ne ſont pas ſemblables, écrivez-les de ſuite.

4°. Au lieu d'écrire chaque grandeur ſemblable ſéparément, il faut ſimplement mettre une fois la lettre qui les exprime, & à ſa gauche le caractere

arithmétique qui marque le nombre des grandeurs exprimées ainsi $a+a+a+b+b$, s'écrit $3a+2b$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a \quad +3c-3d \end{array}$$

Démonstration.

Les lettres étant des nombres indeterminés, on peut supposer que chacune est une unité; on peut donc ajouter les grandeurs qui sont exprimées par la même lettre, comme des choses de même espéce. (§. 4. Arithm.)

Les grandeurs marquées par le signe + sont des grandeurs qui existent actuellement en réalité, & celles qui sont marquées par le signe — n'ont pas une existence réelle. Si l'on a donc des grandeurs de l'une & l'autre espéce à ajouter, les secondes suppléent au défaut des premieres, & il faut nécessairement dans ce cas, que la soustraction prenne la place de l'addition.

Remarque premiere.

Quand on veut ajouter des grandeurs algébriques, il faut les écrire les unes sous les autres comme dans l'arithmétique. Puis si elles ont le même signe, ajoutez-les en mettant ce même signe: si elles ne l'ont pas, écrivez la différence, en lui donnant le signe de la quantité qui est la plus grande.

Cette méthode s'appelle *corriger l'expression*. Cette réduction ne peut se faire que lorsque les quantités sont semblables.

$$\begin{array}{r} \textit{Soit donné} \quad 3a - 2b + 6c + 2d \\ a + 2b - 3c - 3d \\ \hline 4a \quad 0 + 3c - 1d \end{array}$$

EXEMPLE.

Pour les Grandeurs différentes.

$$\begin{array}{r} 4a + 5b - 3d \\ 6c - 3f + 2g \\ \hline 4a + 5b - 3d + 6c - 3f + 2g. \end{array}$$

Voilà l'addition toute faite en les écrivant l'une après l'autre.

Remarque seconde.

17. Les quantités marquées au signe — sont estimées comme *dettes* ; les quantités au contraire marquées avec le signe + sont censées être de l'argent que l'on posséde, sans que personne y prétende rien. C'est pourquoi les premieres quantités sont appellées moins que rien, parce qu'il faut payer ses dettes avant que l'on puisse être censé ne devoir rien.

Remarque troisiéme.

18. Pour rendre ce calcul plus clair & plus évident, supposons que a veut dire $1^{\text{liv.}}$ b 1^{sol}, c $1^{\text{den.}}$

$$\begin{array}{rr} 7a - 9b + 5c\,, & 7^{\text{liv.}} - 9^{\text{f.}} + 5^{\text{den.}} \\ 3a + 5b - 9c\,, & 3 \quad + 5 \quad - 9 \\ \hline 10a - 4b - 4c\,, & 10^{\text{liv.}} - 4^{\text{f.}} - 4^{\text{den.}} \end{array}$$

On voit par-là que j'ai dix liv. mais que je dois 4 sols 4 deniers, parce que ce qui est marqué au signe — marque la dette, & que 10 a qui sont sup-

posés avoir ce signe + à gauche, marque un argent présent.

Problême II.

19. Soustraire des quantités algébriques marquées au même, ou à différens signes.

Solution.

1°. Ecrivez les grandeurs semblables, s'il y en a, les unes sous les autres; si les signes sont les mêmes, retranchez la plus petite quantité de la plus grande, en faisant la soustraction comme dans l'arithmétique (§. 43. arithm.)

2°. Si la quantité que l'on doit soustraire est plus grande que celle de laquelle on veut la retrancher, ôtez néantmoins la plus petite de l'autre, & marquez le nombre restant par le signe —, si elles avoient toutes deux le signe +; & si au contraire avant la soustraction elles avoient celui-ci —, vous mettrez devant le reste le signe +.

3°. Si les quantités avoient des signes différens, ajoutez ensemble les quantités que vous devez soustraire, & marquez la somme qui en viendra par le signe qu'avoient les quantités desquelles vous deviez faire la soustraction. En un mot, changez les signes des quantités qui soustrayent, & faites la reduction.

Soit donné	$8a - 5c + 9d$	ou $8^{liv.} - 5^{f.} + 9^{d.}$
Dont on veut ôter	$6a - 8c - 7d$	ou $6^{liv.} - 8^{f.} - 7^{d.}$
Reste	$2a + 3c + 16d$	ou $2^{liv.} + 3^{f.} + 16^{d.}$

En changeant les signes de la grandeur qui soustrait, on aura $-6a + 8c + 7d$, puis faisant la réduction avec ceux de $8a - 5c + 9d$, on a le reste $2a + 3c + 16d$.

Démonstration.

Chaque lettre étant prise pour une unité, on peut faire la soustraction comme dans les nombres dont la valeur est déterminée.

Pour trouver la différence de deux grandeurs, il faut changer le négatif en positif, & le positif en négatif, & faire la réduction de ce que l'on a fait. Dans l'arithmétique on ne change que le positif en négatif, parce que tout y est positif; mais comme l'un & l'autre se trouve dans l'algébre, il faut nécessairement changer l'un & l'autre signe. Car on ne peut soustraire le négatif qu'en le rendant positif, en lui ajoutant réellement une valeur qu'il n'avoit pas. Ainsi quand on soustrait une grandeur négative, c'est comme si l'on soustrayoit les dettes de quelqu'un en les payant, ce qui augmenteroit son bien de cette quantité.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 9b + 15c - 7d + 8e - 1f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

Procedez dans cet exemple comme dans le précédent; changez les signes & faites la réduction.

Démonstration.

Lorsque la plus grande quantité positive $+20c$ doit se soustraire de la plus petite également positive $+15c$, on soustrait plus d'unités qu'on ne peut en ôter, & par conséquent il faut mettre le signe — devant le reste négatif qui vient de cette soustraction; on a donc $-5c$. Si l'on veut souf-

traire une plus grande quantité négative — $9d$, d'une plus petite — $7d$, il faut absolument ajouter de nouveau la quantité $9d$ qu'on avoit soustraite de plus qu'on ne pouvoit ; car la quantité $20c$ au lieu de la quantité $20c - 9d$, a été soustraite de $15c$: c'est pourquoi la quantité négative — $7d$ détruisant $7d$ ajouté à la positive $9d$, il reste la positive $2d$. On voit donc clairement, que dans tous ces cas il suffit de retrancher la plus petite grandeur de la plus grande, & de poser devant le reste le signe contraire —, si les grandeurs ont le signe +: & au contraire le signe +, si elles avoient celui-ci —.

Mais lorsque les signes sont différens, & que la grandeur négative — $9e$, par exemple, doit être soustraite de la positive + $8c$, il est évident, par ce que nous venons de dire, qu'il faudra lui ajouter la grandeur positive $9e$, qui est au-dessous, parce que la grandeur qu'on en avoit soustraite étoit plus grande qu'il ne falloit ; & c'est pourquoi *il naît de cette addition* la positive + $17e$. Si l'on avoit au contraire à soustraire la positive + $7f$ de la négative — $1f$, comme je ne puis retrancher sept grandeurs positives d'une seule négative, sans en faire sept négatives, j'aurai — $8f$; car si, par exemple, je dois un écu, & qu'on m'en retranche encore sept, au lieu d'un seul que je n'avois pas, il m'en manquera encore sept, qui ajoutés à un feront — $8f$. Par conséquent dans les deux cas, il ne faut qu'ajouter les deux grandeurs l'une à l'autre, & mettre devant la somme le signe qu'avoit la grandeur de laquelle on devoit soustraire l'autre.

Autre Exemple.

Pour les Grandeurs qui ne sont pas exprimées par la même lettre.

$$\begin{array}{l} 3a+2b-4d \\ \underline{6c+4f-3g} \end{array}$$

Reste $3a+2b-4d-6c-4f+3g$

Changez les signes de la grandeur qui soustrait, puis écrivez de suite toutes les quantités comme elles sont cy-dessus, & la soustraction se trouvera faite. On ne doit point faire de réduction, parce que les grandeurs ne sont pas les mêmes, étant exprimées par des lettres différentes.

Problême III.

20. Multiplier des quantités les unes par les autres, marquées au même signe, ou non.

Solution.

1°. Placez les grandeurs comme il est marqué (§. 8 & 9.) & faites la multiplication comme dans l'arithmétique. (§. 49.)

2°. Faites bien attention que quand le signe du multiplicateur est le même que celui du multiplicande, le signe du produit sera toujours +, & si les signes sont différens on mettra celui-ci —.

EXEMPLE.

$a+b-d$	$10=8+4-2$
$a-b-d$	$2=8-4-2$
$-ad-bd+dd$	$-16-8+4$
$-ab-bb+bd$	$-32-16+8$
$aa+ab-ad$	$64+32-16$
$aa\ 0-2ad-bb+dd$	$20=64-48\ 0+4$

Démonstration.

Il est évident que + multiplié par + doit produire + & de même — par — produira + ; car *plus*, ou ce qui est le même, une grandeur positive multipliée par une autre positive, ne peut que produire une grandeur positive, & par conséquent +. Il n'est pas plus difficile à concevoir que — multiplié par — produira également +, car cette multiplication n'étant à proprement parler qu'une soustraction réiterée d'une grandeur négative, & cette soustraction ne pouvant se faire qu'en changeant — en +, le produit sera nécessairement +. Si donc on multiplie — 3 par — 2 : comme *multiplier* est prendre le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, 2 ayant le signe *moins*, ne contient pas deux unités, mais — 2 unités ; prendre — 2 fois, c'est soustraire deux fois, & soustraire deux fois un défaut ou une dette, c'est donner 2 fois ce qu'il faut pour réparer ce défaut, ou acquiter cette dette. Donc prendre 2 fois le défaut — 3, c'est donner + 3.

Le contraire arrive si l'on multiplie — par + ou + par — ; car pour lors le produit sera —, parce qu'il faut prendre le défaut ou la dette — autant de

fois qu'il y a d'unités dans +, & que multiplier une dette est ajouter une négative. Dans le second cas il faudra prendre la grandeur + non pas autant de fois qu'il y a d'unités dans la négative — parce que cette grandeur négative ne contient pas, par exemple, deux unités, mais — 2 unités ; ainsi le signe du produit se trouvera négatif, car prendre — 2 fois, c'est soustraire deux fois. + par — doit avoir le signe — parce que *plus moins*, indique plusieurs *moins*, — par + aura le même signe — parce que *moins plus* indique la négation du *plus*. On voit donc clairement que le produit de la multiplication doit toujours être + quand les signes sont les mêmes, & — lorsqu'ils sont différens.

Corollaire.

21. Si l'on multiplie $-a$ par $+b$, le produit est $-ab$; donc si $-ab$ est divisé par $+b$, le quotient doit être $-a$. Mais si l'on divisoit $-ab$ par $-a$, le quotient seroit $+b$. D'où, on doit conclure que la régle (*le produit des mêmes signes est +, & celui des signes différens est —*) a la même force dans la Division que dans la Multiplication.

Problême IV.

22. Diviser une grandeur littérale par une autre, soit qu'elles ayent le même signe ou non.

Solution.

Si l'une des deux grandeurs se peut effectivement diviser par l'autre, la division se fait comme dans l'Arithmétique (§. 51.) en observant toutefois ce que nous avons dit du changement des signes.

Si la Soustraction ne peut se faire, on s'en tiendra à ce que nous avons prescrit. (§. 14. & suiv.)

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} a-b-d)\ aa-bb-2ad+dd\ (a+b-d \\ \qquad\qquad aa-ab-\ ad \\ \hline a-b-d)\ ab-bb-\ ad+dd \\ \qquad\qquad ab-bb-\ bd \\ \hline a-b-d\ )\ bd-\ ad+dd \\ \qquad\qquad -ad+\ bd+dd \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Remarque premiere.

23. Les lettres n'ayant pas comme les chiffres une valeur déterminée, il n'est pas nécessaire de garder l'ordre & l'arrangement que nous avons marqué dans l'Arithmétique pour les nombres, que l'on doit partager en tranches. On tire le quotient de quelque nombre que l'on veut. On n'est pas non plus obligé à observer cette loi, quand il s'agit de faire la Soustraction du produit du diviseur multiplié par le quotient.

Remarque seconde.

1°. Lorsque vous voulez faire la division de quelques grandeurs algébriques, écrivez le dividende à côté du diviseur, en les séparant par un petit arc, comme dans l'exemple cy-dessus, & vous mettrez le quotient à l'autre bout en le séparant aussi par un petit arc.

2°. Effacez du dividende & du diviseur les grandeurs qui leur sont communes en même nom-

bre de fois de part & d'autre ; c'est une regle qu'il faut observer pour abreger les expressions ; ainsi au lieu de $\frac{abc}{abd}$ on écrira seulement $\frac{c}{d}$ au lieu de $\frac{aabbcdef}{aabbce}$ on écrira df, parce que le quotient multiplié par le diviseur donnera dans le premier exemple abc, & dans le second, toutes les lettres du dividende.

S'il y avoit des nombres à gauche du dividende & du diviseur, on divise ces nombres à la façon ordinaire des nombres, & l'on met le quotient à la gauche du quotient littéral. Par exemple, pour abreger l'expression $\frac{6aabbcd}{3abcd}$ on diviseroit 6 par 3, ce qui donne 2, & l'on écriroit au quotient $2ab$.

Mais si la division des chiffres ne peut se faire on les laisseroit subsister, en faisant pourtant la réduction ordinaire. On écriroit donc $\frac{7aab}{3ab}$, au lieu de $\frac{7aaab}{3a}$, &c.

3°. Multipliez le quotient par le diviseur, & ôtez le produit des grandeurs semblables. S'il reste ensuite des grandeurs communes au dividende & au diviseur, recommencez la même opération sur les grandeurs suivantes du dividende que vous abaisserez : s'il n'y en a point, écrivez le reste à part, & le diviseur à gauche.

Soit donné, par exemple, $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$ par $a+b+c$: j'écris ainsi le dividende & le diviseur comme dans l'exemple précédent.

$a+b$

$$\begin{array}{l} a+b+c)\ aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd\ (a+b+d \\ \quad a+b+c)+ab \quad +bb+bc \\ \qquad\qquad\qquad a+b+c)+ad+bd+cd \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad o \quad o \quad o \end{array}$$

Je dis ensuite, aa divisé par $+a$ donne a au quotient, je multiplie les termes $a+b+c$ du diviseur par le quotient, & j'ai aa pour produit, qui retranché de aa du dividende, il ne reste rien. Puis a par $+b$ donne ab, & de $+2ab$ retranchant ab, il reste ab que j'écris au-dessous, en mettant un point sur deux aa, pour marquer qu'ils ont été divisés : (ce qui doit toujours être observé) a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ ôtant $+ac$, il ne reste rien.

J'abaisse les termes $bb+bc$ du dividende, & j'écris le diviseur à gauche, puis je dis $+ab$ divisé par a donne au quotient $+b$, puis multipliant ce quotient par le diviseur, & retranchant le produit des termes $ab+bb+bc$, il ne reste rien.

J'abaisse les trois derniers termes $ad+bd+cd$, & mettant le diviseur à gauche, j'opére comme ci-dessus, & je trouve au quotient $+d$, & achevant le reste de la même maniere, il ne me reste rien. Ainsi le quotient total est $a+b+d$.

Il arrive quelquefois que la division semble ne pouvoir pas se faire, parce qu'il manque au dividende des termes qui contiennent quelqu'un des termes du diviseur, lorsquil se trouve multiplié par le quotient. Il faut dans ce cas, donner une fois au dividende la grandeur qui lui manque sous le signe $+$ & une autre fois sous le signe $-$, ce qui est la même chose que si on ne lui donnoit rien, parce que le second détruit totalement le premier.

DEFINITION IV.

24. On nomme *puissance* une grandeur prise en elle-même. Le produit de cette grandeur multipliée par elle-même, est la *seconde puissance* ou son *quarré*. On appelle *troisiéme degré* ou *troisiéme puissance* ou *le cube de la premiere*, la seconde puissance multipliée par la premiere. La troisiéme multipliée par la premiere se nomme *quatriéme puissance*, ou quatriéme dégré. La quatriéme multipliée encore par la premiere se nomme *cinquiéme dégré ou puissance*, &c. ce que l'on peut continuer jusqu'à l'infini. Enfin la premiere grandeur qu'on nomme aussi premier dégré, est la racine de toutes ses puissances, c'est-à-dire, a est la racine quarrée de sa seconde puissance, ou de son quarré aa; il est la racine troisiéme de sa troisiéme puissance, ou de son cube aaa; la racine quatriéme de sa quatriéme puissance $aaaa$, &c.

Les grandeurs complexes prennent leurs différens noms de la quantité des termes qui les composent. En ont-elles seulement deux, on les nomme *binomes*, si elles en ont trois on les nomme *trinomes*, & *quatrinomes* quand elles en ont quatre, &c. mais en général on les nomme *multinomes*. $a + b$ est un binome; $c + d + e$ est un trinome, &c.

Hypothèse VII.

25. On indique ordinairement le degré d'une puissance, ou la dignité à laquelle est élevée une quantité, par un petit chiffre placé à droite au haut de la lettre qui exprime cette grandeur ou cette quantité, comme x^1, x^2, x^3, x^4, x^5. Ainsi aa se marquera a^2, aaa, a^3, $aaaa$, a^4. bb, b^2, bbb, b^3, & telle autre quantité ou grandeur que

ce soit. Mais si une grandeur est élevée à un dégré indéterminé, comme seroit le centiéme, le milliéme, ou celui que l'on veut, au lieu de chiffre on met une petite lettre de l'alphabet, comme x^m, a^m, b^m, &c. Les chiffres ou les lettres ainsi placées se nomment les *Exposans* de la puissance ou des dégrés de cette grandeur.

Corollaire I.

26. Si quelqu'un veut multiplier une puissance par une autre puissance de même grandeur, il faut dans ce cas-là ajouter les exposans aux exposans

EXEMPLE.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n.
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Corollaire II.

27. Mais lorsqu'on divise une puissance par une autre, il faut soustraire l'exposant du diviseur de celui du dividende.

EXEMPLE.

x^7	x^7	y^{m+n}	y^m
x^4	x^3	y^n	y^n
x^3	x^4	y^m	y^{m-n}

Corollaire III.

28. Lorsqu'enfin vous voulez élever une grandeur donnée à une puissance plus grande que celle qu'elle a, multipliez l'exposant de la grandeur donnée par celui de la puissance à laquelle vous voulez l'élever.

Exemple.

La grandeur x eſt élevée au troiſiéme dégré ou puiſſance, & vous voulez l'élever à la quatriéme, multipliez les deux expoſans l'un par l'autre & vous aurez x^{12}; de même x^m élevée à x^n, vous aurez x^{mn}.

Remarque.

29. La raiſon en eſt évidente; car il faut ajouter l'expoſant 3 quatre fois à lui-même (§. 26.) ce qui ſe fait en le multipliant par 4 (§. 13. Arithm.)

Corollaire IV.

30. Si l'on veut donc extraire la racine d'une puiſſance, c'eſt-à-dire, la quantité d'où la puiſſance a pris ſon origine par la multiplication faite de cette même quantité par elle-même (§. 74, 75, Arithm.) & (§. 25, Algeb.) il faut diviſer l'expoſant de la puiſſance par l'expoſant de la racine. On demande par exémple la racine quarrée de x^{12} : diviſez x^{12} par x^{3}, vous aurez x^{3}; & la racine ^{m} de x^{n} eſt $x^{\frac{n}{m}}$; de même la racine cubique de a^{6} ſera $a^{\frac{6}{3}} = a$.

Remarque.

31. Il faut donner une grande attention à ce que nous venons d'indiquer ſur les racines, parce qu'elle ſervira beaucoup pour comprendre ce que nous dirons dans la ſuite.

Hipothèſe VIII.

32. Quand on ne peut extraire la racine des nombres ou des lettres qui expriment une grandeur,

on écrit à gauche de cette grandeur le signe $\sqrt{}$, qu'on nomme le *signe radical*, & l'on met au-dessus le nombre qui marque le dégré de cette racine; mais si la racine est quarrée, on se contente de mettre le signe $\sqrt{}$ sans exposant; par exemple, la racine cubique de x s'écrit ainsi $\sqrt[3]{x}$. La racine cinquiéme de x s'écrit $\sqrt[5]{x}$, & la racine quarrée $\sqrt[2]{x}$, ou simplement $\sqrt{x}$.

$\sqrt[3]{b}$ est la racine cubique de b; $\sqrt[4]{ac}$ est la quatriéme racine de ac.

Corollaire.

33. On peut se servir de cette formule au lieu de l'autre, si on la trouve plus commode $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (§. 30.)

Remarque.

On trouve souvent dans les calculs algébriques, des grandeurs littérales qui n'ont que des exposans négatifs, comme a^{-3}, a^{-4}. Cela vient de ce que dans la division des grandeurs qui ont des exposans positifs, comme b^3, b^4, &c. par d'autres grandeurs semblables qui ont des exposans positifs; il arrive quelque fois que l'exposant du diviseur est plus grand que l'exposant du dividende; & comme selon le corollaire (§. 27.) on doit soustraire l'exposant du diviseur de l'expoſant du dividende, on aura par exemple $\frac{b^3}{b^4} = b^{3-4} = b^{-1}$. Il faut encore remarquer que $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$. Car suivant ce que nous avons dit art. 2. de la remarque seconde du (§. 23.) on doit effacer en même quantité les grandeurs semblables qui se trouvent dans le diviseur & dans le dividende; ainsi dans l'Exemple suivant

$\frac{b^3}{b^5} = \frac{bbb}{bbbbb} = \frac{1}{bb} = \frac{1}{b^2}$: mais par le (§. 27.) on aura $\frac{b^3}{b^5} = b^{3-5} = b^{-2}$; donc $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$. Il s'ensuit de-là, que toute grandeur qui a un exposant négatif, comme c^{-3}, c^{-7}, peut être marquée ainsi: $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{c^7}$, & par conséquent $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{c^2} = c^{-3}$, c^{-2}.

Definition V.

34. Les quantités ou grandeurs desquelles on ne peut extraire exactement la racine, se nomment quantités ou grandeurs *irrationnelles*; si ce sont des nombres, on les nomme *nombres irrationnels*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{6}$.

Definition VI.

35. L'*Equation* est une double expression d'une quantité ou d'une grandeur par des termes différens; comme $2 + 3 = 1 + 4$. où vous voyez que 3 ajoutés à 2 font la somme de 5, aussi bien que 4 ajoutés à 1.

Problême V.

36. Résoudre par l'algébre un problême proposé.

Régle.

1°. Distinguez les grandeurs ou quantités proposées & connues de celles que vous cherchez; les connues par les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, &c. & les inconnues par les dernieres x, y, z. (§. 5.)

2°. Cherchez autant d'équations qu'il se trouve de grandeurs inconnues : si cela ne peut se faire ; c'est une marque que le *probléme* n'est pas *determiné*, & que l'on peut prendre à volonté une ou plusieurs des grandeurs que l'on cherche. Pour les équations, on les trouve dans l'énonciation même du problême, sinon il faut les extraire de l'expression même, ou des circonstances du problême à l'aide des théorêmes sur l'égalité.

3°. Comme dans l'équation les quantités connues sont mêlées avec les inconnues, il faut les séparer, de maniere que d'un côté on n'ait qu'une seule quantité inconnue, & de l'autre toutes celles qui sont bien connues. Pour en venir à bout, on ajoutera les quantités soustraites; on soustraira celles qui sont ajoutées; on divisera celles qui sont multipliées; on multipliera celles qui sont divisées; on extraira la racine des puissances; on élévera les racines aux puissances, afin de conserver toujours par cette opération une même égalité. (§. 24, 25, 26, 27, Arithm.)

Problême. VI.

37. Ayant la somme de deux quantités avec leur différence, trouver ces quantités.

Solution.

Soit la sommme $= a$ la plus grande quantité $= y$
Et la différence $= b$ Et la plus petite $= x$
Selon la condition du Problême on aura $x + y = a$ (§. 9. Arit.) $y - x = b$ (§. 12. Arithm.)
$x = x$ soit soustrait $x = x$ soit ajouté $y = a - x$ $y = b + x$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Donc } a-x=b+ & x \text{ (§. 22. Arithm.)} \\
x= & x \text{ ajouté.} \\
a=b+2x & \\
b=b & \text{foustrait} \\
a-b=2x & \\
\hline
\dfrac{a-b}{2}=x & \text{(2 Divis.}
\end{array}
$$

Ainsi la valeur de x substituée à celle de $y=b+x$; on a $y=b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

Régle.

Soustrayez de la somme a la différence b, & divisez le reste par 2 : le quotient est la plus petite quantité x. Ajoutez la différence à la somme, & la moitié fera la plus grande quantité y.

Soit pour Exemple,

$a=30$, $b=8$ on a $(a-b):2=(30-8):2=22:2=11$ & $(a+b):2=(30+8):2=38:2=19$.

Remarque.

38. De cette derniere équation on pourroit former une régle générale pour résoudre le Problême dans tous les cas qu'on peut le proposer, si l'on substituoit aux lettres de l'algébre les noms des choses exprimées par ces lettres, & si au lieu des signes on faisoit les opérations d'Arithmétique qu'ils représentent : mais comme nous ne nous sommes proposés que de faire un abregé, pour éviter d'être trop diffus, nous ne mettrons point de régles, à moins que des circonstances particulieres ne l'exigent. Je le fais d'autant plus volontiers qu'on a beaucoup plûtôt résolu un exemple donné par les

chiffres quand on les ſubſtitue aux lettres, qu'en ſe ſervant d'une regle pour opérer par ces mêmes lettres. D'ailleurs, on trouve ſouvent dans ces équations, où les quantités connues & inconnues ſont mêlées, divers Théorêmes très-utiles.

Dans l'équation, par Exemple, $a-b=2x$; on voit le Théorême ſuivant.

Si de la ſomme de deux quantités on ſouſtrait leur différence, ce qui reſte eſt le double de la plus petite de ces quantités.

Exemple.

6 & 11 font 17 : je ſouſtrais de 17 la différence de 6 à 11 qui eſt 5, il reſte 12, la moitié de 12 eſt 6, qui eſt la plus petite des deux quantités propoſées.

Problême VII.

39. Trouver un nombre dont la moitié avec la troiſiéme & la quatriéme partie, ſurpaſſeront ce nombre d'une ſeule unité.

Solution.

Soit le nombre cherché x, il ſera ainſi par les conditions du Problême.

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x=x+1$$

C'eſt-à-dire, $(12x+8x+6x):24=\frac{26}{24}x=x+1$ (§. 65 Arit.)

Multip. par 24 $\quad 26x=24x+24$

$24x=24x$ ſouſt.

$2x=24$

(2 Diviſ.

$x=12$

Preuve.

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x=6+4+3=13=12+1$$

On ne trouve donc aucun autre nombre que 12; qui puiſſe être celui que l'on cherche.

Problême VIII.

40. Ayant la ſomme de deux nombres & le produit de l'un par l'autre, trouver ces mêmes nombres.

Solution.

Soit la ſomme $= a$ la demi différence $= x$
Le produit $= b$ le plus grand nombre $= \frac{1}{2}a + x$ } §. 36.
Le plus petit $= \frac{1}{2}a - x$

Donc par les conditions du Problême

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$$xx = xx \text{ ajout.}$$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$b = b \text{ ſouſtr.}$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = x$$

Soit $a = 14$, $b = 48$: on aura $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Donc le plus grand nombre ſera $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1$; & le plus petit $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Problême IX.

41. Ayant la ſomme de deux quantités & la différence de leurs quarrés, trouver ces deux quantités.

Solution.

Soit la ſomme $= a$ demi diff.
La diff. des quar. $= b$ des quantit. $= y$
La plus grande quantité ſera $= \frac{1}{2}a + y$ (§. 36.)
La plus petite $= \frac{1}{2}a - y$

Le □ de la plus grande $=\frac{1}{4}aa+ay+yy$
— De la plus petite $=\frac{1}{4}aa-ay+yy$

La differ. des □ $b=2ay$

$2a$ Divis.

$$\frac{b}{2a}=y$$

Soit $b=40$, $a=10$: on aura $y=\frac{40}{20}=2$; & par conséquent un des deux nombres $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$; l'autre $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Problême X.

42. Ayant la somme de deux quantités, & la somme de leurs quarrés, trouver l'une & l'autre quantité.

Solution.

Soit la 1re. somme $=a$ demi differ.
la 2e. $=b$ des quantités $=y$
La plus grande quantité sera $=\frac{1}{2}a+y$
La plus petite . . . . $=\frac{1}{2}a+y$ (§. 36.)
Le □ de la plus grande $=\frac{1}{4}aa+ay+yy$
Celui de la plus petite $=\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Somme des □ $b=\frac{1}{2}aa+2yy$

Par conséquent $b-\frac{1}{2}aa=2yy$

$\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa=yy$ & $y=\sqrt{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}a^2}$

Soit $a=10$, $b=58$: on aura $\sqrt{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa}=\sqrt{29-25}=\sqrt{4}=2$. Donc $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, & $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Problême XI.

43. Deux Voyageurs ont pris la même route, le

premier eſt parti tel jour & fait tant de lieues par jour. Le ſecond eſt parti tel jour & parcourt tant de chemin dans un jour ; combien faudra-t-il de tems au ſecond pour atteindre le premier ?

Solution.

Somme des lieues que fait le premier dans un jour, $= a$, le ſecond $= b$, tems depuis le départ cond $= c$, tems cherché $= x$.

Le chemin qu'a fait le premier pendant le tems donné ſera $= a\,c$, pendant le tems que l'on cherche $= a\,x$. Le chemin qu'aura parcouru le ſecond pendant le tems cherché ſera $= b\,x$ (§. 85. Arithm.) c'eſt pourquoi ſelon la condition du Problême.

$$ac + ax = bx$$
$$ax = ax \text{ ſouſtr.}$$
$$ac = bx - ax = (b - a)x \qquad (b - a \text{ Diviſ.}$$
$$ac : b - a = x$$

Soit $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$: on aura $x = 24 : (8 - 6) = \frac{24}{2} = 12$.

Problême XII.

44. Sachant l'eſpace de chemin qu'un voyageur parcourt dans un jour, avec le tems qui s'eſt écoulé depuis ſon départ ; trouver l'eſpace de chemin qu'un ſecond voyageur devra parcourir dans un jour, pour atteindre l'autre au bout d'un tems marqué.

Solution.

Soit le chemin que le premier fait par jour $= a$, le chemin que fait le ſecond $= x$,
$= b$ tems écoulé depuis le départ du 1er.
.... tems que l'on a marqué au 2e. $= c$,

Selon l'expreſſion du Problême, on aura comme dans le précedent.

$$\frac{ab + ac = cx}{\frac{ab}{c} + a = x} \; c \text{ Diviſ.}$$

Soit $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: on aura $x = \frac{24}{12} + 6 = 2 + 6 = 8$.

Problême XIII.

45. Connoiſſant la diſtance de deux villes, & le chemin que font dans un jour deux voyageurs, qui en partent à la même heure ; trouver le tems où ils ſe rencontreront.

Solution.

Diſtance des lieux $= a$ chem. d'un j. du 1er. $= b$
Tems de leur rencontre $= x$ du 2e. $= c$

Le chemin que le premier aura fait pendant le tems x ſera $= bx$, le chemin qu'aura fait le ſecond dans le même tems x ſera $= cx$ (§. 85. Arith.) & comme l'eſpace de chemin que l'un a fait, ajouté à celui de l'autre, rempliſſent la diſtance des lieux d'où ils ſont partis : on aura

$$bx + cx = a$$

C'eſt-à-dire, $(b + c)\, x = a$

$$x = a : (b + c)$$

Soit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: on aura $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$.

Ce ſera donc le douziéme jour qu'ils ſe rencontreront.

Problême XIV.

46. Je vends à un tel prix telle mesure de vin ; combien faudra-t-il que j'y mêle d'eau pour le vendre à un tel prix plus bas ?

Solution.

Soit le plus haut prix $= a$, quantité d'eau $= x$
Le plus bas $= b$
Quantité de mesure $= 1$

Donc le prix de la quantité $1 + x$, $= b + bx$. Car comme 1 est à b, de même $1 + x$ est à $b + bx$ (§. 85. Arith.) & comme l'eau est supposée ne rien couter, nous disons

$$b + bx = a \text{ (§. 20. Arith.)}$$

$$bx = a - b$$

$$x = (a - b) : b$$

Soit $a = 16$, $b = 10$: on aura $x = (16 - 10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Problême XV.

47. Le prix d'un vin excellent, & celui d'un vin moins bon une fois posé, déterminer la quantité qu'il faut mêler de ce dernier avec l'autre pour faire un vin qu'on puisse vendre à un prix moyen.

Solution.

Soit le prix du meilleur $= a$	Quantité du vin commun qu'il faut mêler avec le bon $= x$
Du plus commun $= b$	Son prix sera $= bx$
Le prix moyen $= c$	Quantité du bon qu'il faut mêler avec le commun $= 1 - x$
Nombre des mesures $= 1$	Son prix sera $= a - ax$;

C'est pourquoi selon la condition du Problême

$$a - ax + bx = c \text{ (§. 20. Arith.)}$$
$$+ax = ax \text{ ajout.}$$

$$a + bx = c + ax$$
$$bx = bx \text{ soustr.}$$

$$a = c + ax - bx$$
$$c = c \text{ soustr.}$$

$$a - c = ax - bx = (a - b)x$$

$$\frac{a - c}{a - b} = x$$

Soit $a = 16, b = 10, c = 12$: on aura $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Il faut donc en prendre $\frac{2}{3}$ du commun, & $\frac{1}{3}$ du meilleur, pour faire le mêlange que l'on cherche.

DEFINITION VII.

48. On appelle *Racine Binome* celle qui est composée de deux parties, comme $a+b$; on appelle *Trinome*, celle de trois, comme $a+b+c$; *quadrinome*, celle de quatre, comme $a+b+c+d$: en général on donne le nom de *Multinome* à toutes les racines qui ont plus de deux termes.

Problême XVI.

49. Trouver la nature d'un quarré ou d'une seconde puissance, dont la racine est binome.

Solution.

On cherche comment se forme le quarré d'une racine binome (§. 4. Méthod. Mathem.) Multipliez

donc la racine binome par elle-même, le produit indiquera de quelles parties est composé le quarré, & comment les parties du quarré se forment des parties de la racine.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline -\ ab+bb \\ aa+ab\qquad \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$ quarré de la racine binome.

Théorême.

Le quarré d'une racine binome contient les quarrés de chaque partie (a^2 & b^2) & le produit ($2ab$) pris deux fois d'une partie ($2a$) multipliée par l'autre (b)

DEFINITION VIII.

50. L'équation affectée sous le quarré est celle où $xx \mp ax = \pm b$.

Problême XVII.

51. Résoudre une équation affectée sous le quarré.

Solution.

Prenez x dans l'équation $xx \mp ax = \pm bb$, pour une partie de la racine binome; puis a, quantité connue du second membre, fera le double de la racine de l'autre partie : & ainsi $\frac{1}{2}a$ fera l'autre partie de la racine : il s'ensuit donc que les deux nombres $xx \mp ax$ feroient un quarré parfait, s'il n'y manquoit pas le quarré de la partie $\frac{1}{2}a$, ou $\frac{1}{4}aa$.

Si

Si l'on ajoute donc ce quarré de part & d'autre, on pourra extraire la racine quarrée, & il sera facile de résoudre l'équation proposée.

$$xx.\quad ax = b^{*}$$
$$\tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa$$
$$xx.\quad ax + \tfrac{1}{4}aa = bb + \tfrac{1}{4}aa.$$
$$x.\quad \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}aa.bb}$$
$$x =.\quad \tfrac{1}{2}a.\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}aa.bb}$$

Remarque.

52. J'ai mis des points (.) au lieu des signes + & — afin de n'être pas obligé de distinguer plusieurs cas. On aura lieu de voir souvent l'usage de cette régle dans la suite, il suffit actuellement de l'éclaircir par le Problême suivant.

Problême XVIII.

53. Ayant le produit de deux grandeurs avec leur différence, trouver ces mêmes grandeurs.

Solution.

Soit le produit $=a$, la grandeur la plus grande $=x$
La différence $=b$ la plus petite $=y$

On aura selon la condition du Problême,

$$a = xy \qquad b = x - y$$
$$a : y = x \qquad b + y = x$$

Donc $a : y = b + y$ (§. 22. Arith.)

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad y \text{ multip.}}$$

$$a = by + yy$$

$$\frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$$

$$a + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + by + yy$$

$$\sqrt{(a + \frac{1}{4}bb)} = \frac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{(a + \frac{1}{4}bb)} - \frac{1}{2}b = y.$$

Soit $a = 40$, $b = 3$, on aura $y = \sqrt{(40 + \frac{9}{4})} - \frac{3}{2} = \sqrt{(\frac{169}{4})} - \frac{3}{2} = (\frac{13}{2} = \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5;)$ & par conséquent $x = 8$.

Problême XIX.

54. Déterminer la différence de deux quarrés, dont les racines ne différent que d'une unité.

Soit une racine $= n$, & l'autre $= n + 1$

Le □ de la grande $= nn, + 2n + 1$

De la petite $= nn$

Différence $= 2n + 1$.

Solution.

Tout nombre pris deux fois donne un nombre pair. Le nombre pair ne différe de l'impair que d'une unité, le nombre impair égal à la somme des racines est donc précisement la différence de deux quarrés qui ne différent que d'une unité.

Soient les racines 8 & 9 : la différence des deux quarrés sera $17 = 8 + 9$.

Problême XX.

55. Déterminer la différence de deux cubes, dont les racines ne différent que d'une unité.

Solution.

Soient les racines n & $n+1$: Le cube sera $\begin{cases} \text{le plus grand} = n^3 + 3nn + 3n + 1 \\ \text{le plus petit} = n^3 \end{cases}$

La différence $= 3nn + 3n + 1$

C'est-à-dire, $nn + 2n + 1 + 2nn + n = \overline{n+1}^2 + 2n^2 + n$.

La différence que l'on cherche est donc la somme du quarré de la plus grande racine, du quarré de la plus petite pris deux fois, & de la petite racine elle-même.

EXEMPLE.

Soient les racines 8 & 9, la différence des cubes sera $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2.8^2 + 8$.

Problême XXI.

56. Déterminer la somme du premier & du dernier terme, dans la progression arithmétique.

Solution.

Soit le premier terme a, la différence des termes d : on aura la progression (§. 56. Arithm.)

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d, \&c.$$

$$\begin{array}{ccc} a+4d. & a+2d & a \\ \hline 2a+5d & 2a+5d & 2a+5d \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{cccc} a.\ a+d & a+2d. & a+3d. & a+4d \\ a+3d. & 2 & & a \\ \hline 2a+4d & 2a+4d & = & 2a+4d \end{array}$$

Théorême.

Dans toute progression arithmétique, la somme

des extrêmes est égale à la somme des moyens, pourvû qu'ils soient à égale distance des extrêmes. La somme de ces extremes est aussi égale au double du moyen quand le nombre est impair.

EXEMPLE.

3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.
			12	9	6	3
			24 =	24 =	24 =	24.

Corollaire.

57. On aura donc la somme de la progression arithmétique, si l'on multiplie la somme des extrêmes par le nombre qui fait la moitié des termes.

Problême XXII.

58. Ayant le premier terme, la différence des termes, & la somme de la progression arithmétique, trouver le nombre & le dernier des termes.

Solution.

Soit le premier terme $= a$, le dernier $= y$
La différence $= d$, leur nombre x.
La somme $= c$, on aura (§. 57.)

$\frac{1}{2}x(+y) = c$, $a + \overline{x-1}\,d = y$
——— 2. multip.

$ax + xy) = 2c$

$xy = 2c - ax$
——— x Divis.

$y - (2c - ax) : x$ donc (§. 22 Arith.)

$(2c - ax) : x = a + dx - d$
——— x Multip.

$2c - ax = dxx + ax - dx$
——— d Divis.

$$2c = dxx + 2ax - dx$$

$$2c : d = xx + \frac{(2a - d)}{d} x$$

C'est-à-dire, si l'on fait $\frac{(2a - d)}{d} = m$

$$2c : d = xx + mx$$

$$\tfrac{1}{4} m^2 = \tfrac{1}{4} mm \text{ (§. 51.)}$$

$$2c : d + \tfrac{1}{4} m^2 = xx + mx + \tfrac{1}{4} mm$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} mm + 2c : d} = x + \tfrac{1}{2} m$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} mm + 2c : d} - \tfrac{1}{2} m = x.$$

Soit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, on aura $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$, donc $x = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Consequement $y = 2 + 5.3 = 2 + 15 = 17$.

Problême XXIII.

59. Trouver combien de fois on peut changer les termes d'une proportion géométrique, sans détruire cette proportion.

Solution.

On n'a qu'à changer les termes autant de fois qu'on le peut, comparer entr'elles leurs sommes, leurs différences, &c. on verra pour lors quels sont les cas où la proportion subsiste, pourvû que l'on fasse attention, si dans les deux rapports l'exposant demeure toujours le même, ou non. (§. 53. Arith.)

Soit donc $a : ma = b : mb$. Je veux garder la proportion de ces termes, en les changeant de place. Ces changemens prennent des noms différens, selon la maniere dont ils se font. Pour éviter la répétition, je me contenterai de mettre ici les différens noms à la gauche des termes, dont l'arrangement les produit. Ceux qui en voudront sçavoir l'expli-

cation, auront recours à la remarque du (§. 83. Arithm.)

Soit donc $a : ma = b : mb$ à changer, on aura

alternando $a : b = ma : mb$
invertendo $ma : a = mb : b$
convertendo $a + ma : a = b + mb : b$
componendo $a + ma : ma = b + mb : mb$
dividendo $ma - a : a = mb - b : b$
$ma - a : ma = m - b : mb$
Or $aa : mmaa = bb : mmbb$
Ou généralement $a^n : m^n a^n - b^n : m^n b^n$

De même

$$a : mac = b : mbc$$
$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$
$$ac : ma = bc : mb$$
$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$
$$ac : mac = b : mb$$
$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$
$$ac : mac = bd : mbd$$
$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

Soit selon l'ordre $a : ma = b : mb$
& $ma : mna = mb : mnb$
on aura tout de même $a : mna = b : mnb$
Soit sans ordre $a : ma = b : mb$
& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$
on aura aussi $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Remarque.

60. On trouve ſans peine, dans les arrangemens différens des termes, dix-huit théorêmes, qu'il faut bien s'inculquer dans l'eſprit, quans on veut étudier ſérieuſement les livres de Mathématique, ou trouver de ſon propre fond les vérités que les Mathématiques renferment ; car la proportion géométrique eſt à proprement parler, l'ame des ſciences qui font le corps des Mathématiques. Je regarde comme ſuperflus d'énoncer ici divers Théorêmes, parce qu'il n'eſt perſonne qui avec un peu d'attention, ne puiſſe les former quand il jugera à propos. Par exemple on énoncera le premier Théorême de la maniere ſuivante.

I.

Quatre grandeurs étant en proportion géométrique, la premiere ſera à la troiſiéme, comme la ſeconde à la quatriéme.

II.

Lorſque dans une proportion géométrique, on multiplie le premier & le troiſiéme terme par la même grandeur, les termes ne laiſſeront pas que d'être en proportion. Ainſi a & b étant multipliés par c, les produits ac & bc ſont en même raiſon que a & b.

Problême XXIV.

61. Trouver la maniere de changer deux grandeurs, de façon que leur premier rapport demeure le même.

Solution.

Soient les deux quantités a & ma, ayant 1 pour rapport à m; on aura

I $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c}$

$ac : mac = a : ma$
$= 1 : m$

II $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c}$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$
$1 : m$

III $\frac{a : ma}{b : mb}$

$a-b : ma-mb = a : ma$
$= b : mb$
$= 1 : m$

IV $\frac{a : ma}{b : mb}$

$a+b : ma+mb = a : ma$
$= b : mb$
$= 1 : m$

Théorême.

I. Si l'on multiplie deux grandeurs par une même troisiéme, les produits seront en même raison que les grandeurs.

II. Deux grandeurs a & b étantdivisées par une même, comme c, les quotiens sont en même raison que les grandeurs.

III. Si les parties que l'on soustrait des grandeurs, sont en même raison que les grandeurs entières, les parties qui restent après la soustraction ont aussi le même rapport avec les grandeurs entières.

IV. Si les parties ajoutées aux grandeurs ont le même rapport entr'elles que les grandeurs ausquelles on les ajoute, leurs sommes seront aussi en même raison.

Problême XXV.

62. Déterminer le produit du premier terme

multiplié par le dernier dans une progreſſion géométrique.

Solution.

Soit le premier terme a, l'expoſant m; ou aura la progreſſion (§ 56. Arithm.)

$$\begin{array}{ccccccc} a. & ma. & m^2a. & m^3a. & m^4a. & m^5a. & m^6a. \\ m^5a & & m^3a & m^6a & & & a \\ \hline m^6a & = & m^6a & m^6a & = & & m^6a. \end{array}$$

Théorême.

Dans toute progreſſion géométrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, qui de part & d'autre ſont en même rapport avec les extrêmes; & ſi le nombre des termes eſt impair, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen, & au produit des autres moyens, qui ſont en même raiſon, que quand le nombre des termes eſt pair.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{cccccc} 3. & 6. & 12. & 24. & 48. & 96. \\ & & & 12 & 6 & 3 \\ \hline & & & 288 = & 288 = & 288 \end{array}$$

EXEMPLE de la ſeconde partie du Théorême.

$$\begin{array}{ccccccc} 3. & 6. & 12. & 24. & 48. & 96. & 192. \\ & & & & & & 3 \\ \hline & & & 576 & = & & 576 \end{array}$$

Problême XXVI.

63. Déterminer le quotient dans une diviſion faite de la différence du premier & du dernier ter-

me, par l'expoſant qu'on aura diminué d'une unité.

Solution.

Soit que le premier terme eſt a, l'expoſant m, le nombre des termes n; le dernier terme ſera $m^{n-1}a$, la différence du premier & du dernier $m^{n-1}a - a$. Si on diviſe cette différence par $m - 1$, on aura le quotient $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$, &c.

$$m - 1\,)\,m^{n-1}a - a \left\{ \begin{array}{l} m^{n-2}a + m^{n-3}a + \\ m^{n-4}a + m^{n-5}a + \\ m^{n-6}a + m^{n-7}a \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} + m^{n-1}n - m^{n-2}a \\ \hline + m^{n-2}a - a \\ + m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline + m^{n-3}a - a \\ + m^{n-4}a - m^{n-5}a \\ \hline + m^{n-5}a - a \\ + m^{n-5}a - m^{n-6}a \\ \hline m^{n-6}a - a \end{array}$$

&c.

Si l'on détermine n, par exemple, à 7, on aura $n - 7 = 0$, conſéquemment $m^{n-7}a = m^0 a$, & ainſi la diviſion ſera finie, & de cette diviſion naît le Théorême ſuivant.

Théorême.

Si l'on diviſe la différence du premier & du dernier terme d'une progreſſion géométrique par l'expoſant duquel on a ôté une unité, le quotient ſera la ſomme de tous les termes, excepté le dernier.

Corollaire.

64. Si l'on ajoute donc le dernier terme au quotient dont je viens de parler, on aura la ſomme de toute la progreſſion géométrique.

DEFINITION IX.

65. On dit que trois ou quatre termes ſont en *proportion harmonique*, lorſque la différence du premier & du ſecond a une même raiſon avec la différence du ſecond & du troiſiéme, que le premier terme a avec le troiſiéme. Ainſi ces trois nombres 60, 30, 20 ſont une proportion harmonique; car la différence de 60 à 30, qui eſt 30, a une même raiſon avec 10, différence de 30 à 20, que 60 avec 20.

Et dans le ſecond cas, on dit que quatre grandeurs ſont en *proportion harmonique* lorſque la différence de la premiere & de la ſeconde eſt à la différence de la troiſiéme & de la quatriéme, comme la premiere grandeur à la quatriéme. Si dans le premier cas on continue les termes avec la même méthode, ce ſera une *progreſſion harmonique.*

Remarque.

Cette *proportion* qu'on nomme *harmonique* a pris ſon nom de ce que les Muſiciens s'en ſervent dans leurs compoſitions, & en font beaucoup de cas. Elle eſt, pour ainſi dire, compoſée de la proportion arithmétique, & de la proportion géométrique, comme on le voit dans le raiſonnement de la définition cy-deſſus.

Probléme XXVII.

66. Ayant deux grandeurs, en trouver une troi-

siéme qui leur soit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la premiere $= a$ la troisiéme $= x$
La seconde $= b$
On aura (§. 65.)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax$$

$$2ax - bx = ab$$

$$(2a - b) \text{ Divis.}$$

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

Soit $a = 10$, $b = 16$; on aura $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Corollaire I.

67. Si $2a = b$; on aura $x = ab : 0$; conséquemment $1 : 0 = x : ab$; & ainsi dans ce cas on ne sçauroit trouver un nombre qui soit en proportion harmonique, encore moins le trouvera-t-on, lorsque b sera plus grand que $2a$.

Corollaire II.

68. Si l'on prend la seconde grandeur pour la premiere, & la troisiéme pour la seconde, on trouvera de la même façon la quatriéme, c'est pourquoi on propose le Problême suivant.

Problême XXVIII.

69. Ayant deux grandeurs, en trouver une moyenne, qui soit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la premiere $= a$
La troisiéme $= b$, la seconde $= x$
on aura (§. 53.)

$$x - a : b - x = a : b$$

$$bx - ab = ab - ax$$

$$ax + bx = 2ab$$

$$x = 2ab : (a + b)$$

Soit $a = 10$, $b = 40$, on aura $x = \frac{800}{50} := 16$.

Problême XXIX.

70. Trois grandeurs étant données, en trouver une quatriéme qui soit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la premiere grandeur $= a$
La seconde $= b$, la $4^e = x$
La troisiéme $= c$
on aura (§. 65.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac$$

$$ac = 2ax - bx$$

$2a - b$ Divis.

$$ac : (2a - b) = x$$

Soit $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$, on aura $x = 72$. $(12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Problême XXX.

71. Trouver un cercle égal à la superficie d'un cylindre.

Solution.

Soit le diamétre du cylindre d, sa conférence p, sa hauteur a; on aura la superficie ap (§. 197. Géom.) Soit le diamétre du cercle x; on aura $d : p = x : \frac{px}{d}$ (§. 129. Géom.) la circonférence du cercle est donc $\frac{px}{d}$, & sa superficie sera $\frac{pxx}{4d}$ (§. 134 Géom.) donc

$$\frac{px^2 : 4d = ap}{\frac{x^2 = 4ad}{x = \sqrt{4ad}\text{, ou } \tfrac{1}{2}x = \sqrt{ad}.}}$$

Théorême.

La superficie d'un cylindre est égale à un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre le diamétre & la hauteur du cylindre.

Problême XXXI.

72. Connoissant la hauteur d'un cylindre égale au diamétre connu d'une boule, trouver le diamétre du cylindre.

Solution.

Soit la hauteur du cylindre a, le diamétre de la boule d, sa circonférence p, le diamétre du cylindre x; on aura pour solidité de la boule $\frac{1}{6}p\,d^2$ (§. 208. Géom.) la circonférence du cylindre $px:d$

(§. 129. Géom.) Sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197. Géom.) C'est pourquoi

$$\frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d \quad 4d \text{ Multip.}$$
$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2 \quad ap \text{ Divis.}$$
$$\frac{2}{3}\frac{d^3}{a} = x^2$$

Et par consequent $3a : 2d = d^2 : x^2$.

Problême XXXII.

73. Ayant le diamétre & la hauteur d'un cône, trouver le diamétre d'un cylindre qui soit égal au cône en hauteur & en solidité.

Solution.

Soit le diamétre du cône d, sa hauteur a, le diamétre du cylindre x, le rapport du diamétre à la circonférence $d : p$; on aura pour la solidité du cône $\frac{1}{12}adp$ (§. 201. Géom.) la circonférence du cylindre $px : d$, & sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197. Géom.) ainsi donc

$$\frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d \quad 4d \text{ Multip.}$$
$$\frac{4}{12}ad^2p = apx^2 \quad ap \text{ Divis.}$$
$$\frac{1}{3}d^2 = x^2$$
$$\sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x$$

x est donc le moyen proportionnel entre $\frac{1}{3}d$ & d.

Problême XXXIII.

74. Connoissant le diamétre & la hauteur d'un

cône, trouver le diamétre d'une boule qui lui soit égal.

Solution.

Soit le diamétre de la baze d'un cône d, sa circonférence $=p$, sa hauteur a, le diamétre de la boule x; on aura pour solidité du cône $\frac{1}{12}adp$ (§. 201. Géom.) & la solidité de la boule $px^3:6d$ (§. 208. Géom.) De là

$$\frac{1}{12}adp = px^3 : 6d$$
$$\text{6 } d \text{ Multip.}$$
$$\frac{6}{12}ad^2p = px^3$$
$$p \text{ Divis.}$$
$$\frac{1}{2}ad^2 = x^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2} = x$$

Problême XXXIV.

75. Expliquer la nature des équations.

Solution.

1°. Prenez autant de valeurs que vous voudrez de la grandeur inconnue, formez-en de simples équations, mais égales à zéro.

2°. Multipliez ces simples équations l'une par l'autre; il en naîtra des équations plus grandes, dont l'examen manifestera les proprietés.

Soit $x = 2$ $\quad x = a$
$x = -3$ $\quad x = -b$
$x = 4$ $\quad x = c$

On aura

$x - 2 = 0$ I $\quad x - a = 0$
$x + 3 = 0$ II $\quad x + b = 0$
$x - 4 = 0$ III $\quad x - c = 0$

Multipliez

Multipliez d'abord la premiere équation par la feconde, vous multiplierez enfuite le produit par la troifiéme.

$$
\begin{array}{ll}
x-2=0 & x-a=0 \\
x+3=0 & x+b=0 \\
\hline
3x-6 & +bx-ab \\
x^2-2x & xx-ax \\
\hline
x^2+x-6=0 & x^2-ax+bx-ab=0 \\
x-4=0 & x-c=0 \\
\hline
-4x^2-4x+24 & x^3-cx^2-bcx-abc=0 \\
 & +bx^2+acx \\
x^3+x^2-6x & -ax^2-abx \\
\hline
x^3-3x^2-10x+24=10 &
\end{array}
$$

En faifant attention à ces équations, qu'on peut facilement élever à des dégrés plus hauts, on obfervera avec Harriot & Defcartes

1°. Que la grandeur connue du fecond membre eft la fomme des racines, mais marquées par un figne contraire ; que la grandeur connue du troifiéme, eft la fomme des produits des membres multipliés deux à deux ; que la grandeur connue du quatriéme eft la fomme des produits des racines multipliées trois à trois, &c. Enfin, que le dernier membre eft le produit de toutes les racines. Dans l'équation quarrée, par exemple, la grandeur connue $1=3-2$ du fecond membre ; les racines font $+2$ & -3. De même dans l'équation cubique, la grandeur connue du fecond membre -3 $=+3-4-2$; les racines font $-3+4$, & $+2$. La grandeur connue du troifiéme membre dans l'équation cubique $-10=-6+8-12$,

les racines sont -3, $+4$ & $+2$. Le dernier membre dans la même équation est $+24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

2°. Il faut aussi observer qu'il y a autant de véritables racines dans une équation, qu'il s'y trouve de changemens de signes; & autant de fausses qu'il y a de successions de ces mêmes signes.

Exemple.

Dans l'équation quarrée $x^2 + x - 6 = 0$, il n'y qu'une succession de signe $++$ & un changement $+-$. Cette équation a deux racines, l'une vraie $+2$, l'autre fausse -3. Dans l'équation cubique $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Il y a deux changemens de signes $+-$ & $-+$; une succession $--$. On y trouve aussi trois racines, deux vraies $+2$ & $+4$, & une fausse -3.

Problême XXXV.

76. Trouver toutes les racines *rationnelles* contenues dans une équation.

Solution.

Le dernier membre d'une équation étant le produit de toutes les racines (§. 5.) il faut le réduire en ses produisans, que vous substituerez successivement à x dans l'équation donnée : car dans tous les cas où les nombres positifs & négatifs se détruiront mutuellement, on y trouvera la valeur de x substituée.

Soit, par exemple $x^2 - 6x + 8 = 0$. Le der-

nier membre 8 a pour produisant 2 & 4. Qu'on mette donc $x = 2$, on aura

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} x^2 & 4 \\ -6x & -12 \\ +8 & +8 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

2 est la véritable racine de l'équation. Qu'on mette donc aussi $x = 4$, on aura

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} x^2 & 16 \\ -6x & -24 \\ +8 & +8 \\ 0 & 0 \end{array}$$

On aura donc aussi 4 pour l'autre racine véritable de l'équation.

Soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ les produisans du dernier membre 15 sont 1, 3, 5 : si l'on substitue 1 à la place de x, on aura

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} x^3 & 1 \\ -3x^2 & -3 \\ -13x & -13 \\ +15 & +15 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

1 est donc une des véritables racines.

Qu'on substitue ensuite 3 à x; on aura

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} x^3 & 27 \\ -3x^2 & -27 \\ -13x & -39 \\ +15 & +15 \\ \hline 0 & -24 \end{array}$$

3 n'est donc pas une des véritables racines.

Qu'on ſubſtitue enfin 5 à x; on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 125 \\ -3x^2 = -75 \\ -13x = -65 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

On voit par-là que 5 eſt l'autre véritable racine.

Autrement.

Les équations compoſées étant formées par la multiplication des ſimples, (§. 75) ſi quelqu'une des racines étoit rationnelle, l'équation pourra ſe diviſer par une équation ſimple formée de x, & d'un des produiſans du dernier membre; eſſayons donc de faire cette diviſion.

Soit l'équation propoſée $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Les produiſans du dernier membre ſont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: d'où les ſimples équations $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x + 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x + 12 = 0$ ſont compoſées. En-vain voudroit-on faire la diviſion par $x - 1$, & $x + 1$; d'où il eſt facile de conclure que 1 n'eſt pas une fauſſe racine, ni une des véritables. Il faut donc tenter cette diviſion par $x - 2$.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \; (x^2 - x - 12x, - 2) \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline \quad - x^2 - 10x \\ \quad - x^2 + 2x \\ \hline \qquad - 12x + 24 \\ \qquad - 12x + 24 \\ \hline \qquad\quad 0. \end{array}$$

Par où je vois que 2 eſt une des racines véritables ; & comme 12 eſt le dernier membre dans le quotient, 8 & 12 ne ſont pas dans le nombre des racines.

On eſſaye en vain de diviſer par $x - 3$, l'équation quarrée $x^2 - x - 12 = 0$, mais on en vient à bout par $x + 3$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{rl} & x^2 - x - 12\,(x + 4 \\ x + 3\,) & x^2 + 3x \\ \hline & -4x - 12 \\ & -4x - 12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

3 eſt donc une fauſſe racine de l'équation, parce que $x - 4 = 0$, 4 eſt une autre racine véritable.

De même, ſoit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$; les produiſans du dernier membre ſeront 1, 3, 5 ; il faut donc eſſayer les diviſeurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Commençons à faire la diviſion par $x - 1$.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 13x + 15\,(x^2 - 2x - 15x - \\ x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 - 13x \\ \;\;2x^2 + 2x \\ \hline \;\;\; -15x + 15 \\ \;\;\;\;\; 15x + 15 \\ \hline \;\;\;\;\;\;\; 0 \end{array}$$

On voit donc que 1 eſt une racine vraye dans l'équation propoſée. On ne réuſſiroit pas à vouloir faire la diviſion par $x - 3$ dans l'équation quarrée ; mais on en viendroit à bout en prenant $x + 3$ pour diviſeur.

Comme les Problêmes cy-deſſus & les exemples rapportés, ne mettent pas ſuffiſamment au fait de la formation des équations compoſées, lorſqu'on n'eſt pas bien verſé dans l'étude de l'algébre ; je vais donner en peu de mots quelques explications, qui ſerviront à faire concevoir la ſolution des deux Problêmes précédens.

Des Equations compoſées.

Les équations compoſées ſe forment des équations ſimples, en faiſant paſſer dans le premier membre la grandeur qui eſt dans le ſecond. De ces deux ſimples équations, par exemple, $x = a$, & $x = b$, je forme celle-ci $x - a = 0$, & $x - b = 0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre ; c'eſt-à-dire, le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le ſecond par le ſecond, ce qui me donne l'équation

$$\begin{array}{l} x - a - 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ \quad x - bx \end{array}$$

Dont les deux produiſans ſont $x - a = 0$, & $x - b = 0$; pour décompoſer cette équation il eſt évident qu'il faut retrouver ſes deux produiſans, par le moyen deſquels on trouvera aiſément, que les va-

leurs de x étant a & b, cette inconnue a par conséquent autant de valeurs que l'équation a de dégrés.

Les produisans d'une équation composée se nomment *racines de l'équation*, soit qu'ils soient égaux ou qu'ils ne le soient pas. Ainsi *tirer les racines d'une équation*, c'est trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

Si dans une équation composée l'inconnue se trouve à un même dégré dans plusieurs termes, on les écrit les uns sous les autres, parce qu'ils n'en font qu'un, ainsi $-ax-bx$ ne font qu'un terme, comme dans l'exemple cité.

Il faut observer dans la formation des équations, 1°. Que le *coeficient* du second terme est égal à la somme des racines de l'équation. 2°. Que dans les équations qui ont plus de trois termes, le coeficient du troisiéme comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent se multiplier. 3°. Que dans les équations qui ont plus de quatre termes, le coëficient du quatriéme contient les produits des quatre racines multipliées trois à trois, & ainsi des autres équations qui ont plus de cinq, six termes, &c. 4°. Enfin, que dans toutes les équations, le dernier terme est une quantité toute connue, qui est le produit de toutes les racines.

Corollaire.

Si le second terme manque dans une équation, il faut nécessairement qu'il y ait des racines positives & des négatives qui s'entre-détruisent ; si le troisiéme terme manque dans celles qui en ont plus de trois, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs & d'autres positifs qui s'entre-détruisent ; si

le quatriéme, &c. Lorsque l'équation a tous ses termes on la résout facilement, en se rappellant que le quarré de tout binome $x+b$ contient dans son premier terme, le quarré du premier terme x du binome, deux fois le premier terme x multiplié par le second, ou le double du second multiplié par le premier, & enfin le quarré du second. Nous avions dèja fait presque toutes ces observations (§. 75.)

Problême XXXVI.

77. Extraire par approximation la racine de quelqu'équation que ce soit.

Solution.

Pour donner plus de clarté à la régle nous allons l'appliquer aux exemples, en commençant par l'équation quarrée.

Soit $x^2 - 5x^1 - 31 = 0$. Supposons que la racine est $8+y$, en sorte que y marque l'excès ou le défaut de 8 à l'égard de la racine. On aura donc

$$\begin{aligned} xx &= 64 + 16y + yy \\ -5x &= -40 - 5y \\ -31 &= -31 \\ 7 &+ 11y + yy = 0 \end{aligned}$$

Comme les grandeurs de la fraction vont en diminuant, & que nous ne considérons ici que la racine qui approche le plus de la véritable, on peut laisser le terme yy, & le prendre au lieu de l'équation.

C'est-à-dire, $$-7 + 11y = 0$$ $$11y = 7$$ $$y = 0.6 = 0.\tfrac{6}{10}$$

De là vient $$x = 8 + 0.6 = 8.6$$

Mais comme la valeur de x dans les parties décimales n'eſt pas encore aſſez déterminée, mettez $x = 8.6 + y$, & en recommençant l'opération vous trouverez

$$\begin{aligned} xx &= \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + yy \\ -5x &= -\tfrac{430}{10} - 5y \\ -31 &= -31 \end{aligned}$$

$$\tfrac{396}{700} - \tfrac{410}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0.$$

Ayant réduit les fractions à la même dénomination, l'équation ſe change en

$$\begin{aligned} 7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y &= 0 \\ -0.04 + 12.20y &= 0 \\ 12.20y &= 0.04 \\ y &= 0.0032 \end{aligned}$$

Cette opération donne donc la racine cherchée $8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Si l'on déſire une racine encore plus exacte, il faudroit mettre $x = 8.6032 + y$; d'où l'on auroit $xx = 74.01505024 + 17.206400000y + yy - 5x = -43.01600000 - 5.000000000y - 31 = -31.00000000$.

$$\begin{aligned} -0.000094976 + 12.20640000y &= 0 \\ 12.20640000y &= 0.00094976 \\ y &= 0.000077808 \\ \text{Donc} \quad x &= 8.603277808 \end{aligned}$$

Voyons à préſent la maniere d'extraire la racine

de l'équation cubique $x^3+2xx-23x-70=0$.

Mettez

$$5+y=x$$

On aura $x^3=125+75y\ldots$

$$2x^2=50+20y\ldots$$
$$-23x^1=-115-23y$$
$$-70=-70$$

$$-10+72y=0$$
$$72y=10$$

$$y=0.1$$

Par conféq. $x=5+0.1=5.1$

Mettez enfuite $x=5.1+y$; vous aurez

$$x^3=132.951+78.030y\ldots$$
$$2xx=52.020+20.400y\ldots$$
$$-23x=-11.300-23.000y\ldots$$
$$-70=-70.000$$

$$-2929=95.430y=0$$
$$75.430y=2.629$$

$$y=0.0348$$

Par conféq. $x=5.1+0.0348=5.1348$.

Pour trouver plus facilement la racine dans une quantité de chiffres, il faut retenir la valeur de yy, & réfoudre l'équation par la méthode ordinaire (§. 51.) en y ajoutant cependant quelques fractions décimales, à fçavoir lorfque $x=5+y$, on aura

$$x^3 = 125 + 75y + 15yy$$
$$2x^2 = 50 + 20y + 2yy$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y \; 17yy = 0$$
$$17yy + 72y = 10$$

$$yy + 4.2352y = 0.58823530$$
$$4.484229764 = 4.48422976$$

$$yy + 4.2352y + 4.484229764 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$
$$y = 0.1346$$
donc $x = 5.1346$

Si l'on mettoit de rechef $x = 5.1346 + y$, & qu'on cherchât la valeur de y comme auparavant, on approcheroit de si près de la véritable racine dans ce second calcul, qu'on y toucheroit, pour ainsi dire.

Fin de l'Algébre.



ELEMENS DE GEOMÉTRIE.

Definition I.

1. La *Géométrie* eſt la Science de l'étendue qu'occupent les corps, & de leurs propriétés ſelon leurs trois dimenſions, *longueur*, *largeur & profondeur*.

On appelle *Matiére* ou *Corps*, tout ce qui a des parties unies les unes aux autres.

Definition II.

2. La *Ligne* eſt la longueur conſidérée ſans égard à la largeur & à la profondeur. Le commencement & la fin de la ligne ſe nomme *Point*. Dans la Géométrie, le Point eſt une portion de matiere conſidérée comme n'ayant point de parties, ou comme *indiviſible*; car autrement on le conſidéreroit comme une ligne qui auroit auſſi ſon commencement & ſa fin. La ligne eſt la trace que laiſſeroit après lui un point qui iroit de A en B. *Planche* I. *Fig.* 1.

Remarque.

3. Ce n'eſt pas ſans raiſon que les Géométres conſidérent le point comme tellement indiviſible, que loin qu'un homme ſoit capable d'en former un ſemblable avec aucun inſtrument, il ne puiſſe pas même l'imaginer. C'eſt afin qu'on ne conſidére pas l'extremité d'une ligne comme une de ſes parties; car dans la Géométrie pratique, il faut bien ſe garder de le penſer ainſi.

DEFINITION III.

4. La *Reſſemblance* eſt cette identité des parties, par leſquelles une choſe ſe diſtingue d'une autre.

Remarque.

5. Suppoſons qu'ayant deux choſes A & B abſolument ſemblables, vous les conſideriez avec attention l'une & l'autre en particulier. Vous remarquerez exactement tout ce qu'on peut obſerver dans la choſe A, & vous écrirez vos obſervations. Après en avoir fait autant de B, comparez tout ce que vous avez remarqué, & vous trouverez abſolument la même choſe, ſi vous en exceptez cependant la quantité qu'on ne peut expliquer par de ſimples expreſſions.

Corollaire.

6. On ne peut donc diſtinguer deux choſes ſemblables, qu'en comparant actuellement entr'elles les idées que l'une & l'autre font naître dans l'eſprit, ou avec une troiſiéme choſe, comme feroit une meſure.

DEFINITION IV.

7. On nomme *Ligne droite* A B, celle dont chaque partie eſt ſemblable au tout, & qui eſt le plus court chemin d'un point A à un point B. Elle a ſes parties également poſées entre ſes extremités, & eſt unique, parce que d'un point à un autre point, il ne peut y avoir deux plus courts chemins.
Pl. I. Fig. 1. La *Ligne courbe*, C D eſt celle dont les parties ne reſſemblent pas au tout, & qui ne ſont pas poſées également entre ſes extremités. Il y en a de *Régulieres* & d'*irrégulieres*; la premiere ſe conduit toujours du même ſens, & non pas la ſeconde C D.

Remarque premiere.

8. La ligne droite ſe tire ſur le papier avec une plume, un crayon, un pinceau, &c. en ſuivant la regle donnée pour les points. On la tire ſur le bois ou la pierre, avec un fil frotté de craye ou de charbon; pour marquer une ligne droite ſur la terre, on plante deux bâtons,& on la tire de l'un à l'autre. On connoît qu'elle eſt droite, en plantant ſur la même ligne un troiſiéme bâton entre les deux autres, parce qu'alors appliquant un œil devant le premier, il doit empêcher de voir les autres, car ſi l'on en apperçoit plus d'un, la ligne n'eſt pas exactement droite.

Remarque ſeconde.

9. Pour meſurer une ligne on ſe ſert d'une longueur déterminée, par exemple, d'une *Toiſe*, que l'on diviſe en pieds, le pied en pouces, le pouce en lignes, &c. & comme la meſure eſt arbitraire, on conçoit aiſément qu'elle n'eſt pas la même dans tous les pays.

Remarque troisiéme.

10. Il faut encore bien faire attention que la division de la perche, de la toise, pied, &c. est différente selon les Provinces, Royaumes, & même les villes. La mesure du Rhin est ordinairement divisée en 12 parties, & la mesure Géométrique n'est divisée qu'en 10.

DEFINITION V.

11. La définition de la ligne courbe est connue de tout le monde. Le *Cercle* se fait en conduisant une ligne droite en rond autour & à égale distance du point fixe C. Pl. I. Fig. 2.

Remarque.

12. On se sert d'un instrument quon nomme *Compas*, pour marquer un cercle sur du papier. Quand on veut le figurer sur la terre, & dans toutes les occasions où l'on ne peut user de l'ouverture du compas, on se sert d'un fil, d'une ficelle ou d'une perche, attachés par un bout à un point fixe qui sert de centre.

DEFINITION VI.

13. On nomme *Centre* du cercle le point C, parce que tous les points de la circonférence A, D, F, G, E, en sont également éloignés (§. 11.) La ligne droite C A se nomme le *demi diamétre* ou le *Rayon*; la ligne qui commence au point D de la circonférence & finit à l'autre point de la circonférence E, en passant par le centre C, se nomme *Diamétre*; & toute autre ligne qui prenant naissance à un point de la circonférence, va finir à un au- Pl. I. Fig. 2.

tre point, sans passer par le centre, se nomme *Corde*, ou *Soûtendante*.

Remarque.

14. On divise la circonférence de quelque cercle que ce soit en 360 parties égales, qu'on nomme *Dégrés*, parce que ce nombre peut être facilement & exactement divisé par beaucoup d'autres, comme 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, &c. On divise ensuite chaque dégré en 60 minutes, & chaque minute en 60 *Secondes*. On désigne ordinairement les dégrés par (°) les minutes par (^{I}) & les secondes par (^{II}) par exemple 3°. 25^{I}. 17^{II}. Cela veut dire 3 dégrés, 25 minutes & 17 secondes, ou bien 3° toises $2'$ pieds 4^{II} pouces 5^{III} lignes.

DEFINITION VII.

Pl. I. Fig 3. 15. Lorsque deux lignes AB & AC, s'inclinant l'une vers l'autre se coupent eu un point A, on appelle *angle*, l'espace qui se trouve entre ces deux lignes.

Remarque.

16. On marque cet angle par une seule lettre A, ou pour éviter la confusion, & le distinguer des autres angles, on le marque quelquefois avec les trois lettres BAC, en sorte que A affecté au *sommet* ou *pointe* de l'angle, tienne le milieu entre B & C. La grandeur de l'angle se mesure par un petit arc fait avec un compas ouvert à volonté, dont on met une jambe au point A comme centre, & l'on conduit l'autre, par exemple de D en E. On dit donc que l'angle est d'autant de dégrés que l'arc DE en contient, ce que l'on mesure avec un demi

cercle de laiton ou autre matiere, à qui l'on donne aussi le nom de *Rapporteur*.

DEFINITION VIII.

17. La *Ligne perpendiculaire* est celle qui en coupe une autre à angles droits ; c'est-à-dire, de façon que les angles qu'elle forme de part & d'autre soient égaux. Ainsi l'on connoît que la ligne A B est perpendiculaire à la ligne C D. Pl. I. Fig. 4.

DEFINITION IX.

18. L'angle ABC formé par la perpendiculaire AB & la ligne BC s'appelle *angle droit* (§. 17.) Fig. 4. Tout angle plus petit E que le droit se nomme *angle aigu*, Fig. 5. & tout autre angle plus grand que le droit, comme seroit F, se nomme *angle obtus*. Fig 6.

DEFINITION X.

19. L'angle A fermé par la ligne droite B C, se nomme *Triangle*. Lorsqu'un des trois angles de ce triangle est droit, comme A, on le nomme *Triangle rectangle*. Lorsqu'un des trois est obtus, comme O, on l'appelle *Ambligone* ou *Obtus-angle* ; & lorsque tous trois sont aigus, il se nomme *Oxigone* ou *Acutangle*. Si les trois côtés sont égaux, on les nomme *Equilateral*; s'il n'a que deux côtés égaux AB & BC, on l'appelle *Equijambe*, ou *Isocele* ; si aucuns des côtés ne sont égaux entr'eux, comme HTK, il se nomme *Triangle Scalene*. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fg 11.

La *base* d'un triangle est le côté sur lequel on abaisse une perpendiculaire de l'angle opposé B. Cette perpendiculaire se nomme *Hauteur du triangle* par rapport à sa base. Les deux parties de la base Fig. 9.

divisée par la perpendiculaire se nomment *Segmens de la base*.

On appelle aussi *base* le plus grand côté d'un triangle rectangle ; sçavoir celui qui est opposé à l'angle droit. Il se nomme plus communément *Hypothenuse*. Dans le triangle isocele, on prend ordinairement pour base, le côté inégal aux autres.

DEFINITION XI.

20. Le *Quarré* est une figure dont les quatre côtés A B, B C, C D, D A sont égaux, & forment des angles droits. Le *Rectangle* ou *Quarré long* est celui dont tous les angles sont droits, mais dont les deux côtés opposés seulement sont égaux, comme E H & F G, & les deux autres plus petits E F & H G. Le *Rhombe* ou *Losange* en terme de Blason, a les quatre côtés I K, K L, L M, M I égaux, & les *angles obliques*. Le *Rhomboide* a les quatre angles obliques, mais il n'a de côtés égaux que les deux opposés O N & P Q, Q N & O P.

IP. 1. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15.

On nomme *Trapéze* le *Quadrilatere*, ou figure à quatre côtés, mais dont aucun n'est égal avec les autres, comme S T V Z. On donne enfin le nom de *Trapezoide* à la figure quadrilatere, dont deux des côtés opposés sont paralleles entr'eux, comme E F & G H.

Fig 6. Pl. I. Fig. 17.

DEFINITION XII.

21. Toutes les autres figures qui ont plus de quatre côtés se nomment *Poligones*, & prennent des noms particuliers selon la quantité déterminée qu'ils en ont ; *Pentagones*, s'ils en ont cinq égaux ;
Fig. 18. *Exagones*, s'ils en ont six, *Eptagones* quand ils en ont sept ; *Octogones* s'ils en ont huit ; *Endecagones* s'ils en ont neuf, & *Dodecagones* s'ils ont

douze côtés. Quand tous les angles d'un poligone sont égaux, comme dans l'*Exagone* A B C D E F, on le nomme *Poligone regulier*, ou figure réguliere ; si au contraire les côtés & les angles ne sont pas égaux, on l'appelle *Poligone irrégulier*, comme le Pentagone G H I K L. Fig. 18. Fig. 19

Definition XIII.

22. On nomme *Paralleles* deux lignes A B & C D, qui quelque longueur qu'elles ayent, sont toujours également distantes l'une de l'autre. Pl. I. Fig. 10.

Definition XIV.

23. Le *Parallélogramme* est une figure de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles entr'eux, comme le quarré, le Rhombe, &c. Quand les angles d'un parallelogramme sont droits, on l'appelle *Parallélogramme rectangle*, ou simplement *Rectangle*. Pl. I. Fig. 12.

La *Base d'un Parallelogramme* est le côté sur lequel on lui a tiré, de l'un de ses deux angles opposés, une perpendiculaire qu'on appelle *hauteur du Parallelogramme* par rapport à sa base I M, où l'on voit que la perpendiculaire tombe en dehors en L O, & qu'elle tomberoit en dedans si on l'avoit tirée de l'angle K. Fig 14.

Axiome I.

24. Entre deux points il ne peut y avoir qu'une seule ligne droite.

Corollaire I.

25. Deux lignes droites ne peuvent donc renfermer une espace ou étendue, parce qu'elles doi-

vent se réunir aux points de leurs extremités.

Corollaire I I.

Pl. I. Fig. 7. 8. 9. 10. 26. Par conséquent dans tous triangles, deux côtés pris ensemble, comme A B, & B C sont plus grands que le troisiéme A C.

Axiome I I.

27. Tous les rayons d'un cercle sont égaux entr'eux (§. 13.)

Axiome I I I.

Fig. 21. 28. Les arcs D E & B C, & tous les autres renfermés entre les jambes de l'angle A B & A C, & qui ont pour centre le sommet de l'angle A, ont la même quantité de dégrés.

Corollaire.

Pl. I. Fig. 21. 29. Puisque la grandeur de l'angle A se mesure par le nombre des dégrés de l'arc D E ou B C (§. 16.) quand on voudra donc mesurer un angle, soit grand ou petit, il suffira de faire un arc semblable à D E ou B C.

Axiome I V.

30. Les lignes droites, & les angles qui se couvrent mutuellement sont égaux : & s'ils sont égaux, ils se couvriront.

Axiome V.

31. Les figures qui se couvrent mutuellement sont semblables & égales : & celles qui sont égales & semblables se couvrent mutuellement. (§. 4.)

Remarque.

32. Il faut bien obſerver, que pour que deux figures ſoient égales, elles doivent ſe couvrir mutuellement : car quoique de deux grandeurs miſes l'une ſur l'autre, celle de deſſus couvre celle de deſſous ; ſi la grandeur de deſſous, renverſée ſur celle de deſſus, ne pouvoit la couvrir exactement, elles ne ſeroient pas égales ; ainſi deux grandeurs doivent avoir préciſement la même figure, & les bords de même étendue pour pouvoir ſe couvrir mutuellement.

Axiome VI.

33. Si deux figures ou lignes ſont formées ou décrites de la même maniere, & par de ſemblables moyens & de ſemblables inſtrumens, ces figures ou lignes ſont ſemblables entr'elles. (§. 4.)

Corollaire.

34. Tous les points (§. 2. & 4.) & les lignes droites étant ſemblables entr'elles (§. 7.) & le cercle étant formé par une ligne droite tournée en rond autour d'un point (§. 11.) tous les cercles, & leurs circonférences doivent être ſemblables, quand à la figure.

Axiome VII.

35. Deux angles de même meſure ſont égaux entr'eux : & s'ils ſont égaux, ils ont la même meſure (§. 16.)

Axiome VIII.

36. Sur quelque ligne que ce ſoit, A B ayant choiſi un point, on peut former un demi-cercle (§. 11.) Pl. I. Fig. 22.

Corollaire.

37. Si du centre C on éleve une perpendiculaire CD, les angles o & x feront égaux entr'eux (§. 17.) le quart d'un cercle, c'eſt-à-dire, 90° (§. 16, 36.) eſt donc la meſure d'un angle droit, & par conſéquent tous les angles droits ſont égaux entr'eux (§. 35.) & un angle égal à un droit, eſt un angle droit (§. 35.)

Théorême I.

Pl. I. Fig. 22. 38. Les deux angles x & o, formés par la ligne perpendiculaire D C appuyée ſur la ligne A B, pris enſemble, font 180°.

Démonſtration.

Pl. I. Fig. 22. On peut décrire un demi cercle du point C ſur la ligne A B (§. 36.) le demi cercle eſt donc la meſure de la ſomme des angles x & o (§. 16.) qui feront par conſéquent 180°, puiſque le cercle entier eſt compoſé de 360°.

Corollaire.

39. Si nous avons donc un angle inacceſſible à meſurer dans un champ, ou un angle obtus, par un quart de cercle on meſure alors l'angle de ſuite qu'il faut leur ſubſtituer.

Définition XV.

Pl. I. Fig. 24. Si l'on prolonge l'un des côtés CB d'un angle CBA au-de-là du ſommet B en E, l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB, & l'angle ABC ſe nomment *Angles de ſuite.* Et ſi

l'on prolonge auſſi l'autre côté AB en H, l'angle ABC & l'angle HBE ſe nomment *Angles oppoſés au ſommet*, ou *verticaux*.

Theorême. II.

40. Si la ligne droite AB coupe l'autre CD au point *u* les angles *verticaux o* & *x* ſont égaux. Pl. I. Fig. 25.

Démonſtration.

$o + u = 180°$ & $u + x = 180°$ (§. 38.) donc $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.) & par conſéquent $o = x$ (§. 28 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

41. Si nous avons donc un angle à meſurer dans un champ ou ailleurs, au lieu de meſurer *x* qui peut-être ſeroit inacceſſible, il faudra ſeulement meſurer l'angle vertical *o*, parceque les angles *oppoſés au ſommet* ſont égaux. Pl. I. Fig. 25.

Théorême III.

42. Tous les angles dont la pointe, où ſommet eſt au point C pris enſemble, ſont égaux à quatre angles droits, ou, ce qui eſt le même à 360°. Pl. I. Fig. 26.

Démonſtration.

Le cercle entier eſt la meſure des angles énoncés dans le Théorême, (§. 11. 16.) ſi on les prend donc tous enſemble, ils contiendront les quatre angles droits qui ſont le cercle entier, (§. 37.) ou 360° (§. 14.)

Problême I.

43. Meſurer un angle donné.

Solution.

Pl. I. Fig. 27. 1°. Si l'angle donné est sur le papier, posez le centre du rapporteur sur la pointe de l'angle A, & ajoutez le bord intérieur de la régle qui fait le diamétre du rapporteur sur la jambe de l'angle A B.

2°. Comptez ensuite sur le rapporteur le nombre des degrez que contient l'arc DE qui se trouve entre les deux côtés de l'angle AB & AC.

Si l'angle proposé est dans un champ ;

Pl. I. Fig. 28. 1°. Posez le *demi-cercle*, ou *graphométre*, de façon que son diamétre AB réponde à un des côtés du triangle.

2°. Faites tourner sur le centre du graphométre la *régle* ou *alidade* EF jusqu'à ce que vous appercevîez l'extrémité de l'autre côté de l'angle à travers la fente des pinnules qui sont attachées à cette alidade.

3°. Comptez ensuite les dégrés que marque *la ligne de foi* de l'alidade qui passe par le centre du demi-cercle, en commençant à la jambe de l'angle à laquelle répond le diamétre du graphométre ; & vous connoîtrez la grandeur de l'angle (§. 16.)

Problême II.

44. Mesurer une ligne droite.

Solution.

Si la ligne proposée est sur le papier, tirez aussi une ligne droite sur le papier, de laquelle vous ferez une *mesure* ou *longueur* sur laquelle vous prendrez avec un compas dix parties égales à volonté, que vous nommerez *Pieds* ; vous transporterez ensuite cette longueur de dix pieds sur le reste de votre mesure autant de fois que faire se pourra, & vous

aurez une meſure (§. 9.) propre à meſurer toute ligne droite ſur le papier.

Si la ligne à meſurer eſt dans un champ, on ſe ſert d'une chaîne, d'une corde, d'une perche ou toiſe, dont les diviſions ſont connues; il ſuffit de diviſer une toiſe en pieds; & la derniere d'une extrémité doit être diviſée en pouces.

Lorſqu'on propoſera donc une ligne droite à meſurer ſur le papier. Pl. II. Fig. 29.

1°. Poſez une jambe d'un Compas ſur A & ouvrez-le juſqu'à ce que l'autre jambe ſoit poſée ſur B.

2°. Tranſportez enſuite une jambe du compas ainſi ouvert ſur le commencement d'une diviſion, par exemple de dix pieds, & l'autre jambe ſur le reſte de votre meſure propoſée, en remarquant bien exactement ſur quelle autre diviſion elle tombera, par exemple, 5 pouces, ou 5 lignes. On verra par là que la ligne propoſée a 10°. & 5¹. ou 5″. de longueur, parce qu'elle contient 10 pieds & 5 pouces ou lignes de la meſure préparée.

Voulez-vous meſurer une ligne donnée ſur la terre?

1°. Plantez un piquet à chaqué extrémité, & ſi la ligne donnée étoit beaucoup plus longue que votre *toiſe*, *perche*, *corde*, &c. poſez un bout de votre meſure au bas d'un des petits piquets plantés aux extrémités de la ligne donnée; conduiſez l'autre bout de la meſure ſur la ligne, & à l'extrémité de cette meſure, plantez un piquet pour faire ſouvenir que l'eſpace d'entre ces deux piquets eſt la longueur d'une toiſe, perche &c. Tranſportez enſuite votre meſure depuis le ſecond piquet que vous venez de planter, juſqu'à l'extrémité de la ligne propoſée, en obſervant de planter un piquet au bout de chacune des longueurs de votre meſure.

2°. Comptez le nombre de toises, &c. que la ligne donnée contient, par le nombre de fois qu'elle renferme la longueur de votre mesure, en tout ou en parties.

Remarque I.

45. On peut ajuster un anneau à chaque extrémité de la chaîne ou corde, dans lesquels anneaux on fait entrer les petits bâtons ou piquets plantés en terre.

Remarque II.

46. Les chaînes sont incommodes par leur pesanteur, & on ne les étend pas assez facilement. Si on mesure une ligne droite avec une perche en la tournant sur pointe, il faut avoir soin ou d'ajoûter à la ligne que l'on mesure la grosseur ou diamétre de la perche autant de fois qu'on l'aura tournée, ou de diminuer le diamétre de la perche, de la longueur de la ligne qu'aura produit la mesure, autant de fois qu'on l'aura tournée. Je suppose, par exemple, que l'on me propose une ligne droite de six toises à mesurer; je prends en main une perche de la longueur précisément d'une toise, & d'un pouce de diamétre ou de grosseur, & j'approche un bout de cette perche d'un des piquets plantés aux extrémités de la ligne proposée; ensuite je leve le bout de la perche qui touchoit au piquet, & j'en forme en l'air un demi-cercle dont le centre est à l'autre bout de la perche, qui dans le moment qu'elle forme une perpendiculaire avec la ligne droite donnée, se trouve posée sur la grosseur, & puis achevant le demi cercle, en la couchant doucement sur le reste de la ligne donnée, le diamétre de ce demi-cercle se trouve avoir deux toises & un pouce, au lieu de deux toises seulement. Je continue à me-

ſurer de la même façon le reſte de la ligne droite, & je trouve que cette ligne ne me paroît avoir que 5 toiſes & 7 pouces au lieu de 6 toiſes qu'elle a en effet. Cela vient donc de la groſſeur de la perche qui ayant un pouce de groſſeur, & ayant été tournée 5 fois, a pris 5 pouces de la ligne donnée qu'il faut par conſéquent ou ajouter à cette ligne donnée, ou diminuer de la longueur de la perche, pour faire la juſte meſure de la ligne propoſée.

Il n'y a pas moins d'inconvéniens à ſe ſervir d'une corde de chanvre ; elle s'allonge dans les tems chauds & ſecs, & ſe raccourcit dans les tems humides. Schwenter a remarqué, (livre 1. trait. 2. p. 381. de ſa Géom. prat.) qu'une corde de 16 pieds de longueur, s'étoit raccourcie preſque d'un pied en moins d'une heure dans un tems de brouillards. Pour lever cet inconvénient, il faut tordre les ficeiles dont on veut faire la corde, dans un ſens contraire à celui que l'on tordra la corde même, qu'il faudra en même-tems imbiber d'huile de lin, & quand elle ſera ſéche, la paſſer dans de la cire fondue, & enfin la goudronner. Le même Schwenter aſſure, (p. 382.) qu'une corde ainſi préparée reſteroit un jour plongée dans l'eau ſans qu'on y pût remarquer preſqu'aucune diminution de longueur.

Remarque III.

47. On a inventé un inſtrument fort commode pour meſurer les lignes ſur le papier ; on le nomme *Echelle Géométrique* ; nous en parlerons plus au long dans la ſuite.

Problême III.

48. Faire un angle égal à un angle donné.

I. Cas. Si on propose l'angle par dégrez, tirez d'abord la ligne droite AB.

Pl. I. Fig. 27. 1°. Appliquez le centre du rapporteur sur le point A, & son rayon sur la ligne A B.

2°. Comptez autant de dégrez depuis D vers E que l'angle donné doit en avoir.

3°. Quand vous aurez trouvé ce nombre, marquez-le par E.

4°. Tirez enfin une ligne droite de A par E, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

Pl. II. Fig. 31. II. Cas. Lorsqu'on propose l'angle DEF sur le papier.

1°. Du centre E décrivez à volonté l'arc GH.

2°. Tirez ensuite la ligne droite *ef*.

3°. De *e* décrivez l'arc *hi* avec la même ouverture de compas de laquelle vous avez formé l'arc ci-dessus GH.

4°. Posez une jambe du compas sur H, & ouvrez le compas jusques à ce que l'autre porte sur le point G.

5°. Posez une jambe du compas ainsi ouvert sur *h* & posant l'autre sur l'arc *h i*, vous marquerez le point où elle tombe *g*.

6°. De *e* par *g* tirez une ligne droite *e d*, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

III. Cas. Si l'angle que l'on propose est sur la terre; il faut se servir du demi-cercle ou graphométre, de la manière que nous avons dit au problême I. (§. 43.)

Démonstration.

Le premier & le troisiéme cas sont démontrés par l'opération même.

Dans le second, l'arc $gh = GH$, comme on le démontrera, (§. 92) & par conséquent l'angle

d e f = DEF (§. 16 .35.) *ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême IV.

49. Si dans les deux triangles ABC & *abc*, on a l'angle A = *a*, AC = *ac*, & AB = *ab*; on aura aussi BC = *bc* B = *b*, C = *c*, & les triangles seront égaux entre eux. Pl. II. Fig. 32.

Démonstration.

Imaginons-nous que le triangle *abc* est tellement placé sur le triangle ABC, que le point *a* soit sur A, & la ligne droite *ab* sur AB, comme *ab* = AB, le point *b* sera sur B; (§. 30.) & comme *a* = A, la droite *ac* sera aussi placée sur AC (§. 30.) & parce que *ac* = AC, le point *c* sera sur C, & par conséquent *bc* sur BC (§. 24.) les triangles ABC & *abc* seront donc égaux; (§. 31.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême V.

50. Si dans les deux triangles ABC & *abc* on a l'angle A = *a* & B = *b*, & le côté AB = *ab*; les triangles seront égaux, & AC = *ac*, BC = *bc*. Pl. II. Fig. 32.

Démonstration.

Représentons-nous le triangle ABC posé sur le triangle *abc* de maniere que A soit posé sur *a*, & le côté AB sur le côté *ab*; puis B sur *b*, la droite AC sur *ac*, & BC sur *bc* (§. 30.) pour lors les lignes droites AC & BC se rencontrent au point C, & les droites *ac* & *bc* au point *c*, le point C se trouvera donc posé sur le point *c*, & les triangles seront égaux. (§. 31.) Et AC = *ac*, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême VI.

Pl. II. Fig. 32. 51. Si dans les deux triangles ACB & *acb*, on trouve AC = *ac*, AB = *ab*, & BC = *bc*; on aura aussi A = *a*, B = *b*, C = *c*, & tous les triangles de cette façon seront égaux.

Démonstration.

Pl. II. Fig. 32. De A rayon AB décrivez avec un compas l'arc *y*, & de C rayon CB décrivez l'arc *x*; supposons ensuite le triangle *acb* posé de façon sur le triangle ACB, que le point *a* soit sur A, & le point *c* sur C; (§. 30.) la ligne droite *ab* se terminera à l'arc *y*, & *cb* à l'arc *x*; le point *b* sera donc sur B, à l'endroit précisément où les arcs se coupent; & par conséquent les triangles (§. 31.) & les angles (§. 30.) seront égaux.

Corollaire.

52. On doit donc conclure que de trois lignes droites données, on ne peut faire qu'un même triangle.

Problême IV.

Pl. II. Fig. 33. 53. Construire un triangle équilatéral sur la ligne donnée AB.

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur A; & ouvrez le compas jusqu'à ce que l'autre jambe rencontre B, & sans changer la jambe du compas posée sur A, décrivez avec l'ouverture de AB, un arc au-dessus de la ligne donnée.

2°. Mettez ensuite une jambe du compas sur B,

& de la même ouverture décrivez un autre arc qui coupera le premier au point C.

3o. Tirez enfin des lignes droites de C à A & B, & le triangle se trouvera fait.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ayant été prises en égale longueur que la ligne AB; (§. 27.) le triangle ACB doit être équilatéral. (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême V.

54. Sur deux lignes droites données AB & BC, faire un triangle qui ait deux côtés égaux.

Solution.

1°. Ayant pris, par exemple, pour base du triangle la ligne droite AB, posez une jambe du compas sur B, ouvrez l'autre jambe jusqu'en C, & formez un arc au même point C. Pl. II. Fig. 34.

2°. Faites sur A comme vous avez fait sur B, & ce second arc coupera le premier au point C.

3o. Tirez des lignes droites de C à A & B, & le triangle sera formé.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ont été faites de la même ouverture de compas; le triangle doit donc avoir les deux côtés égaux. (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême VI.

55. Faire un triangle de trois lignes droites données. Pl. II. Fig. 35.

Solution.

1°. Prenez pour baſe du triangle une des trois, comme ſeroit AB.

2°. De A comme centre, décrivez un arc avec un compas, dont l'ouverture ſoit la longueur d'une ſeconde des trois lignes données, comme AC.

3°. Et puis ouvrant le compas de la longueur de la troiſiéme ligne BC, poſez une jambe ſur B, & de l'autre formez un arc qui coupe le premier au point C.

4°. Tirez enſuite les lignes droites, CA & CB; & vous aurez le triangle que vous deſirez (§. 52.)

Remarque I.

56. Si dans l'opération ci-deſſus les deux arcs ne ſe coupent pas, on ne peut faire le triangle avec les trois lignes droites données. (§. 26.)

Remarque II.

57. Les régles pour la conſtruction des figures ſont d'une très grande utilité. C'eſt ſur elle qu'eſt fondée toute *l'Ichnographie* d'un champ, c'eſt-à-dire, la levée des plans, ſans laquelle il n'eſt pas poſſible de dreſſer la Carte d'un terrein. Bien plus, les principes de reſſemblance que j'ai introduit dans la Géométrie, ſervent auſſi, comme on le verra dans la ſuite, à la démonſtration de la reſſemblance des Figures. On y voit même les parties qu'on doit choiſir dans un terrein, quand il s'agit de le meſurer, ou d'en dreſſer un plan figuré ou non figuré. C'eſt en conſéquence de cette utilité reconnue que je vais propoſer encore quelques problêmes ſur les triangles.

Problême.

Problême VII. Pl. II. Fig. 36.

58. Faire un triangle de deux lignes droites données AB & AC, & de l'angle intercepté A.

Solution.

1°. Prenez pour base la droite AB.

2°. Formez au point A un angle égal à l'angle proposé. (§. 48.)

3°. Transportez sur la ligne AD l'autre droite donnée AC.

4°. Tirez de C une ligne droite à B & le triangle sera fait. (§. 49.)

Remarque.

59. Il n'est pas nécessaire dans la pratique de marquer les lignes inutiles comme ici AD, mais on peut seulement désigner le point C après l'application de la régle.

Problême VIII.

60. Avec deux Angles & une ligne droite donnés construire un triangle.

Solution

1°. A l'extrémité A de la droite donnée AB formez un angle égal à un des angles proposés. Pl. II. Fig. 37.

2°. A l'extrémité opposée faites un autre angle donné; (§. 48.) les jambes de ces deux angles se couperont en C, & formeront le triangle que l'on demande. (§. 50.)

Problême IX.

Pl. II. Fig. 38.

61. Du lieu C meſurer la diſtance des deux autres lieux acceſſibles A & B.

Solution.

1°. Plantez un bâton ou petit piquet au lieu C que vous aurez choiſi à volonté.

2°. Meſurez la longueur de la ligne AC, (§. 44.) & portez-la de C en *a*, enſorte que le bâton que vous planterez au point *a* ſoit en ligne droite avec C & A. (§. 8.)

3°. Faites la même opération pour la longueur de la ligne BC que vous tranſporterez en *b*.

4°. Meſurez enfin la longueur de la ligne *ab*, c'eſt la diſtance que l'on demande.

Démonſtration.

Les angles *x* & *y* ſont égaux (§. 40.) & comme $AC = aC$ & $BC = bC$, on a $ab = AB$ (§. 49.) *Ce qu'il falloit démontrer*

Remarque.

62. Si la place étoit trop étroite pour pouvoir tranſporter en *ab* les longueurs entieres des lignes AC & BC, il ſuffira de tranſporter la moitié, la troiſiéme ou la quatriéme partie en C*a* & C*b*, & pour lors on aura $ab = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$ de AB, ce qu'il ſera facile de comparer. (§. 152.)

Problême X.

63. Tranſporter un angle d'un terrein dans un autre avec une chaîne ou avec une corde.

Solution.

Suppoſons qu'il faille tranſporter l'angle A en C. Pl. II.
1°. Prenez une longueur à volonté ſur chaque Fig. 39.
jambe de l'angle donné A, & tirez une droite de l'un des points choiſis F à l'autre D.

2°. Tranſportez de C en d la longueur AD, & attachez la corde aux deux piquets C & d de maniere que $Cf = AF$, $df = DF$.

3°. Plantez un piquet en f & vous aurez l'angle $dCf = FAD$.

Démonſtration.

Puiſque $AF = Cf$, $AD = Cd$ & $DF = df$, l'angle C eſt donc égal à l'angle A (§. 51.)

Problême XI.

64. Trouver la diſtance de deux lieux dont un ſeul B eſt acceſſible.

Solution.

1°. Ayant planté un piquet dans un endroit choiſi à volonté, comme E, prenez la longueur de la Pl. II.
ligne droite EB, que vous tranſporterez de E en C Fig. 40.
de maniere que le piquet ſe trouve en ligne droite avec B & C (§. 8.)

2°. Faites au point C un angle égal à celui de B. (§. 63.)

3°. Marchez enfin de C vers D, juſqu'à ce que le piquet que vous planterez en D, ſoit en ligne droite avec FC, & EA; & de cette façon la ligne CD ſera égale à la ligne AB.

Démonſtration.

On a fait l'angle C égal à l'angle B, & la droite

CE égale à la droite EB. D'ailleurs les angles verticaux sont égaux. (§. 40.) CD est donc égal à AB. (§. 50.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 41. 1°. On s'y prend encore de la manière suivante. Fichez un piquet en I en ligne droite avec BA, & puis un second où vous voudrez comme en K.

2°. Transportez de K en L la longueur de la ligne IK, & puis en M la ligne BK.

3°. Marchez ensuite de M vers N jusques à ce que vous trouviez un endroit où vous puissiez planter un piquet qui soit en ligne droite avec M & L aussi bien que avec K A, & vous aurez M N = B A.

Démonstration.

BK = KM & IK = KL. $o = u$ & $m = n$, donc I B = LM & $y = x$. Car $o + m = u + n$, & IK = KL, on aura conséquemment IA = NL, & AB = MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

65. Ce que nous avons dit sur le Problême IX. a lieu ici (§. 62.)

Remarque seconde.

Pl. II. Fig. 40. 66. Si l'on vouloit trouver la largeur d'une riviere, & que la ligne droite BE ne pût être transportée de E en C le long du rivage, on fichera le piquet E à une distance du rivage choisie à volonté; & dans ce cas la longueur de la droite CD surpassera d'autant plus la largeur de la riviere que le piquet E sera éloigné de son bord.

Problème XII.

67. Tirer par le point C donné une parallele à la droite AB. Pl. II. Fig. 43.

Solution.

1°. Appliquez une regle à la droite AB,

2°. Posez une jambe du compas en C, & ouvrez l'autre jusqu'à la régle, comme si vous vouliez décrire un arc, dont la droite AB fût la *tangente*.

3°. Conduisez ensuite le compas de part & d'autre du point C, tout le long de la régle posée sur AB, & vous aurez la parallele DE (§. 22.)

Autrement.

On peut faire la même opération avec *une parallele*, c'est-à-dire, un instrument composé de deux regles tellement attachées l'une à l'autre par deux tenons égaux, qu'on puisse conduire facilement ces deux regles, selon les differens espaces qu'on veut leur faire parcourir. Ayant donc une parallele, posez une des regles sur la droite AB. Pl. II. Fig. 44.

2°. Conduisez l'autre jusqu'au point C, & vous pourrez tout le long de cette seconde regle, tirer la droite DE parallele à AB.

Remarque.

68. Si dans la premiere façon de résoudre le Problême, on ne pouvoit ouvrir le compas jusqu'en E, on tirera une parallele à AB, à une distance proportionnée au compas, ou choisie à volonté, comme CD; & si la distance de F à E étoit encore trop grande pour que le compas y puisse atteindre, on formera encore une autre parallele à CD, & ainsi Pl. II. Fig. 42.

de ſuite juſqu'à ce que le compas puiſſe atteindre le point E : on fera pour lors la droite LM qui ſera parallele à la droite AB : car EF = HI & FG = IK : donc EF + FG = HI + IK : c'eſt-à-dire, EG = HK (§. 24. Arithm.) & par conſequent LM ſera parallele à AB (§. 22.)

Problême XIII.

Pl. II. Fig. 45. 69. Du point C donné, abaiſſer une perpendiculaire ſur la droite AB.

Solution.

1°. Ayant poſé une jambe du compas ſur C, coupez avec l'autre la ligne droite AB par un arc à volonté ; comme DE.

2°. De D & E faites une interſection volontaire, comme en F.

3°. Conduiſez une ligne droite par FC, juſqu'à G, & vous aurez la perpendiculaire que l'on demande.

Démonſtration.

On a DC = CE & DF = FE, on aura donc auſſi les angles DFG & GFE (§. 51.) & par conſéquent les angles de ſuite égaux à G (§. 49.) la droi- CG ſera donc auſſi perpendiculaire ſur AB, (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XIV.

Pl. VI. Fig. 46. 70. Elever du point C une perpendiculaire ſur la droite AB.

Solution.

1°. Mettez une jambe du compas ſur C.

2°. Coupez de part & d'autre à égale diſtance de

C, la ligne droite AB, comme feroit DE.

3°. De D & E faites une interfection en F avec la même ouverture du compas.

4°. Tirez enfin la droite GC par CF, & vous aurez la perpendiculaire demandée.

Demonftration.

On fait DC = CE & DF = FE, & on a les angles droits de part & d'autre du point C, (§. 51.) & par conféquent on a la perpendiculaire GC élevée fur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit demontrer.*

Autrement.

Faites un inftrument avec deux regles que vous ajouterez de façon l'une à l'autre, qu'elles faffent un angle droit : cet inftrument fe nomme *Equerre.* Pl. II. Fig. 47.

Appliquez un des côtés de l'équerre fur la ligne donnée AB, de manière que le fommet de l'angle foit précifément fur le point C; puis tout le long de l'autre côté de l'équerre vous tirerez la droite CD, qui fera perpendiculaire.

Démonftration.

L'angle de l'équerre eft droit, les lignes DC & CB, tirées le long de cette équerre, font donc auffi un angle droit; & par confequent DC fera perpendiculaire fur AB (§. 18.)

Théorême VII.

71. Si dans les deux triangles rectangles ABC & *abc*, on a AB = *ab*, & BC = *bc*, ou dans les angles obliques A = *a*, on aura auffi AC = *ac*, B = *b*, C = *c*, & les triangles feront égaux. Pl. II. Fig. 48.

Démonstration.

De l'espace BC ayant fait l'arc FG au point C, imaginons-nous que le triangle *abc* est placé sur l'autre ABC, de façon que le point *a* est sur A, *b* sur B, comme l'angle $a = A$, & $ab = AB$: le point *c* sera donc aussi sur C : & comme $bc = BC$, le point *c* se trouve sur l'arc FG (§. 13.) & par conséquent aussi *c* se trouve sur C, précisément au point où l'arc FG coupe la droite AC ; BC tombant donc sur *bc* (§. 24.) les triangles seront égaux. (§. 31.)

Théoréme VIII

Pl. II. Fig. 49. 72. Si la ligne transversale EF coupe les deux paralleles AB & CD aux points G & H, on aura 1°. Les deux angles alternes *x* & *y* égaux entr'eux. 2°. L'angle *externe* *o* est égal à l'angle *y* qui lui est opposé. 3°. Les deux angles *internes* opposés *u* & *y* font tous deux pris ensemble 180°.

Démonstration.

1°. Qu'on tire les perpendiculaires HI & GK, qui feront égales (§. 22.) les angles I & K sont aussi égaux (§. 18. 37.) Donc $x = y$ (§. 71.)

2°. $x = o$ (§. 40.) donc $y = o$ (§. 22. Arithm.)

3°. $u + o = 180°$. (§. 38.) donc $u + y = 180°$. (§. 24. Arithm.) voilà donc les trois propositions démontrées.

Théoréme IX.

Pl. III. Fig. 49. 73. Si la ligne transversale EF coupe les droites AB & CD en G & H, de façon que les deux angles *x* & *y*, ou même l'angle externe *o*, & l'interne *y* soient égaux ; ou si les deux internes pris ensem-

ble font 180°; les lignes AB & CD feront paralleles entr'elles.

Démonstration.

1°. Abaissez de G la perpendiculaire GK sur la ligne CD : faites GI = HK, & tirez la droite HI. Comme $x=y$, on aura I = K & HI = GK (§. 49.) par conséquent l'angle I sera droit (§. 37.) & AB parallele à CD.

2°. Soit $o=y$, comme $o=x$ (§. 40.) on aura $x=y$ (§. 22. Arithm.) les lignes AB & CD seront donc paralleles entr'elles.

3°. Soit $y+u=180°$. parce que $o+u=180°$. (§. 30.) on aura $o=y$ (§. 22. & 25. Arithm.) conséquemment les lignes AB & CD seront paralleles. Voilà donc les trois propositions démontrées.

Théoréme X.

74. Dans quelque triangle que ce soit, les trois angles pris ensemble font 180°. & si l'on prolonge un des côtés, l'angle externe sera égal aux deux angles internes opposés pris ensemble.

Demonstration.

Tirez par le sommet du triangle C, une parallele DE à la base AB, vous aurez 1 = I, & 2 = II. (§. 72.) or I + 3 + II = 180°. (§. 38.) donc 1 + 3 + 2 = 180°. (§. 24. Arithm.) *Premiere partie du Théorême démontrée:* Si on prolonge le côté AB jusques en D, on aura 3 + 4 = 180°. (§. 38.) Or par ce que nous venons de démontrer plus haut, 1 + 2 + 3 = 180°. Donc 3 + 4 = 1 + 2 + 3. (§. 22. Arithm. & par conséquent 4 = 1 + 2. (§. 25. Arithm.) ce qui démontre la seconde partie du Théorême. Pl. II. Fig. 50. Pl. II. Fig. 51.

Corollaire I.

75. Il n'y a donc qu'un ſeul angle droit dans quel triangle que ce puiſſe être, & les deux autres angles pris enſemble en font un droit, ou valent 90°. (§. 37.) & deux lignes droites perpendiculaires à l'égard d'une troiſiéme, pourroient être prolongées juſqu'à l'infini ſans jamais ſe rencontrer; c'eſt en quoi elles ſont paralleles.

Corollaire II.

76. A plus forte raiſon ne pourra-t-il ſe trouver plus d'un angle obtus dans un triangle (§. 18.)

Corollaire III.

77. Si de 180° on retranche l'angle d'un triangle, la ſomme des deux autres reſte; & ſi au contraire de 180°. on ôte la ſomme de deux angles d'un triangle, ce qui reſte eſt la valeur du troiſiéme.

Corollaire IV.

78. Si deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme de l'un ſera auſſi égal au troiſiéme de l'autre. (§. 25. Arithm.)

Théorême XI.

Pl. III. Fig. 52. 79. Dans un triangle iſocele ABC, les angles x & y formés par la baſe ſont égaux, & la perpendiculaire CD coupera en deux parties l'angle C, la baſe AB, & le triangle même.

Démonſtration.

Qu'on coupe en deux parties égales la droite

AB, & qu'on tire enſuite la droite DC : puiſqu'on a auſſi $AC = CB$ (§. 19.) on aura $x = y$, & $o = u$, $m = n$ & $\triangle ACD = \triangle CDB$ (§. 15.) & par conſéquent CD perpendiculaire ſur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

80. Ainſi dans tout triangle équilateral, tous les angles ſont égaux ; chacun vaut donc 60°. (§. 74.)

Théorême XII.

81. Si dans le triangle ABC, les angles x & y de la baſe AB ſont égaux, les côtés AC & CB ſeront auſſi égaux. Pl. III. Fig. 52.

Demonſtration.

Tirez la droite CD, de manière que $m = n$; & comme $x = y$, on aura auſſi $o = u$ (§. 78.) donc $AC = CB$ (§. 50.)

Corollaire.

82. Si les trois angles ſont donc égaux, & qu'ils vaillent par conſéquent 60°. (§. 74.) les trois côtés ſeront donc auſſi égaux entr'eux.

Théorême XIII.

83. L'angle du centre eſt double d'un *angle à la circonférence*, lorſque ces deux angles ont un même arc pour baſe.

Démonſtration.

I. Cas. $o = x + u$ (§. 74.) or comme AC Pl. III. Fig. 53.

$=$ CB (§. 27.) on aura $x=u$ (§. 79.) & par conſequent $o=u+u=2u$.

Pl. III. Fig. 54. II. CAS. $x=2y$ & $u=2o$, *par le nombre* 1. donc $x+u=2y+2o$ (§. 24. Arithm.)

Pl. III. Fig. 55. III CAS. $o+x=2u+2y$, & $o=2u$, *par le nombre* 1. donc $x=2y$ (§. 25. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

Pl. III. Fig. 54. 84. La moitié de l'arc AD eſt donc la meſure de l'angle à la circonférence ABD, dont l'arc AD eſt la baſe ; car l'arc entier AD eſt la meſure de Pl. III. Fig. 57. & 59. l'angle du centre ACD (§. 16) Si l'angle ACB a pour baſe le demi-cercle ADB, ou que l'angle H BK ait pour baſe l'arc HIK plus grand que le demi-cercle, il eſt évident que le demi-arc AD eſt Fig 59. préciſément la meſure de l'angle ACD, & $\frac{1}{2}$ DB de l'angle DCB, de même $\frac{1}{2}$ HI de l'angle HBI, & $\frac{1}{2}$ IK de l'angle IBK, donc $\frac{1}{2}$ ADB, ou le quart eſt la meſure de l'angle ACB ; & $\frac{1}{2}$ HIK ou un peu plus que le quart eſt auſſi la meſure de l'angle HBK.

Corollaire II.

Pl. III. Fig. 56. 85. Deux ou pluſieurs angles ABC & ADC, terminés à la circonférence du même cercle, & qui ont le même arc AC pour baſe, ſont égaux (§. 35.)

Corollaire III.

Pl. III. Fig. 57. 86. Tout angle dans le demi-cercle ACB eſt droit : car il a le demi-cercle pour baſe, & le quart pour meſure. (§. 84.)

Corollaire IV.

87. Un angle à la circonférence renfermé dans

un cercle, est plus petit qu'un angle droit, s'il a pour base un arc plus petit que le demi-cercle; il sera aussi plus grand qu'un angle droit, si sa base est un arc HK plus grand que le demi-cercle (§. 86.) & par conséquent il sera aigu dans le premier cas, & obtus dans le second (§. 18.) Fig. 59.

Problême XV.

88. Examiner si une *Equerre* est juste.

Solution.

Pl. III. Fig. 57.

1°. Décrivez à volonté le demi-cercle ACB.

2°. Tirez de chaque extrémité du diamétre les lignes droites AC & BC à un même point de la circonférence, tel que bon vous semblera.

3°. Posez au point C l'angle de l'E'querre, & si ses deux côtés rasent les lignes droites AC & AB, l'E'querre est juste.

Démonstration.

L'angle ACB est droit (§. 86.) si l'équerre lui est conforme, elle sera donc juste (§. 30.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XVI.

89. Elever une perpendiculaire à l'extremité d'une ligne.

Solution.

Pl. III. Fig. 60.

1°. Posez une jambe du compas sur un point pris à volonté, comme C, & ouvrez l'autre jusqu'en A.

2°. Du point C marquez la même distance D sur la ligne AB.

3°. Ensuite avec une régle appliquée le long de DC, marquez encore la même distance CA de C en E.

4°. Tirez enfin la ligne droite AEF, qui sera perpendiculaire avec AB.

Démonstration.

Puisque AC = CD = CE, de C on peut décrire un demi cercle par les points E A D (§. 27. 36.) l'Angle A est donc droit, (§. 86.) & par conséquent la droite FA perpendiculaire à AB (§. 18.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire la même opération avec l'équerre, comme nous l'avons vû (§. 70.

Problême XVII.

90. Diviser une ligne droite en deux parties égales.

Solution.

Pl. III. Fig. 61. 1°. Des deux extrémités de la ligne A & B, faites à votre gré les deux intersections C & D.

2°. Tirez une droite de C à D; elle partagera en deux également la droite A B.

Démonstration.

AC étant égal à CB, & AD = DB, on a $o = y$ (§. 51.) ainsi dans les triangles ACE & ECB, AE = EB (§. 49.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Pl. III. Fig. 62. 91. On peut essayer de faire la même opération méchaniquement; c'est-à-dire en tatonnant. Car en mettant une jambe du compas au point A, on

l'ouvre ensuite jusqu'à ce qu'on rencontre à peu près le milieu de la ligne, où on fait un petit arc. On fait la même chose de l'autre côté de la ligne B, le compas ouvert comme auparavant, & l'on voit pour lors si les deux arcs se rencontrent au même point E.

Théorême XIV.

92. Les *cordes* des arcs égaux AB & DE pris dans un même cercle, ou dans deux cercles égaux, sont égales entr'elles, & si les cordes sont égales, les arcs le seront aussi. Pl. III. F. 58 & 63.

Démonstration.

Tirez du centre C les rayons CA, CB, CE & CD, qui sont tous égaux entre eux. (§. 27.) Et comme les arcs AB & DE sont égaux, les angles ACB & DCE seront aussi égaux. (§. 35.) Donc aussi AB = DE.

2°. Soit AB = DE, on aura $o = x$, (§. 51.) & par conséquent les arcs AB & DE seront égaux. (§. 35.)

Corollaire.

93. Si l'on divise donc la circonférence d'un cercle en tant de parties égales qu'on voudra, & qu'on tire des soûtendantes, la figure aura chaque côté & chaque angle égaux; (§. 85.) la figure sera donc aussi réguliere. (§. 21.)

Problême XVIII.

94. Diviser un arc en deux parties égales.

Solution.

Pl. III. Fig. 64. 1°. Des extrémités de la corde AB de l'arc AEB faites les interſections à volonté en C & D.

2°. Tirez une droite de C à D, elle partagera l'arc en deux parties égales.

Démonſtration.

La ligne CD coupe la corde AB en deux parties égales au point E, & forme deux angles droits au même point; (§. 90.) on a donc AE = BE, (§. 49.) par conſéquent les arcs AE & BE ſont égaux. (§. 92.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XV.

Pl. III. Fig. 65. 95. La perpendiculaire DA, coupant la corde EF en deux parties égales en G, paſſe par le centre du cercle C, & coupe en même-tems l'arc EDF en deux parties égales. Le rayon perpendiculaire abaiſſé du centre C ſur la corde EF, coupe non ſeulement la corde, mais encore l'arc EDF.

Démonſtration.

1°. Comme EG = GF, & qu'il y a deux angles droits au point G, on a EAD = DAF; (§. 49.) ainſi les arcs ED & DF ſont égaux. (§. 84. 85.)

2°. Les cordes AE & AF étant égales, les arcs AF & EA le ſont auſſi; (§. 92.) par conſéquent AE + ED = AF + FD, (§. 24. Arithm.) AD étant le diamétre du cercle, AD paſſe donc par le centre. (§. 13.)

3°. Si

3°. Si C G eſt perpendiculaire à EF, les angles du point G seront égaux. (§. 18.) Et comme EC = CF, (§. 27.) on aura EG = GF, & ECD = DCF; (§. 71.) par conſéquent les arcs ED & DF ſont égaux : (§. 35.) Voilà les trois articles démontrés.

Problême XIX.

96. Diviſer un angle donné BAC en deux parties égales. Pl. III. Fig. 66.

Solution.

1°. Ayant poſé une jambe du compas ſur A, marquez un point à volonté ſur chaque côté de l'angle, à égale diſtance de A, comme D & E.

2°. De D & E, faites une interſection au point F.

3°. Tirez la droite AF, & l'angle ſera diviſé en deux parties égales.

Démonſtration.

Puiſque AD = AE & DF = EF, & que la droite AF eſt commune aux deux triangles, on aura $o = x$. (§. 51.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XX.

97. Décrire un cercle dont la circonférence touche à trois points donnés. Pl. III. Fig. 67.

Solution.

1°. De A & B faites des interſections à volonté; comme en D & E, & tirez la droite ED.

2°. Faites de ſemblables interſections de B & C

en F & G, & tirez la droite F G, le centre du cercle sera le point H ou les deux droites se coupent mutuellement.

Démonstration.

Si de A à B, de même que de B à C on tire des lignes droites, elles seront les cordes des arcs du cercle que l'on cherche. (§. 13.) Or les lignes DE & FG coupent en deux parties égales les cordes AB & BC. (§. 90.) Chaque ligne passe donc par le centre du cercle. (§. 95.) Le centre sera par conséquent au point H, où les lignes se coupent réciproquement. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXI.

Pl. III. Fig. 68. 98. Construire un quarré sur une ligne droite donnée AB.

Solution.

1°. Elevez à une de ses extrémités A une perpendiculaire qui ait la même longueur que la ligne AB. (§. 70. 89.)

2°. de B & C faites une interfection en D le compas ouvert de la longueur AB.

3°. Tirez les droites CD & DB.

Problême XXII.

Pl. III. Fig. 69. 99. Construire un rectangle avec deux lignes données AB & BC.

Solution.

1°. Joignez par un angle droit les deux lignes AB & CB. (§. 89.)

2°. De A faites un arc en D, le compas ouvert de l'eſpace BC, & mettant une jambe du compas ſur C, vous l'ouvrirez de l'eſpace BA, & ferez un ſecond arc qui coupera le premier au point D.

3°. Tirez enſuite les lignes droites CD & DA.

Problême XXIII.

100. Ayant la droite AB avec un angle oblique, conſtruire un rhombe. Pl. III. Fig. 70.

Remarque.

1°. Faites l'angle donné A à l'extrémité de la ligne AB, (§. 48.) & vous aurez AC = AB.

2°. De C & B, avec le compas ouvert depuis A juſques à B, faites l'interſection en D.

3°. Tirez enſuite les lignes CD & BD.

Problême XXIV.

101. Ayant les deux droites AB & AC, avec l'angle oblique A, conſtruire un rhomboide. Pl. III. Fig. 71.

Solution.

1°. Placez l'angle donné à l'extrémité A de la ligne AB, (§. 48.) & faites la droite AC égale à l'autre ligne donnée.

2°. De B, le compas ouvert de l'eſpace A C, faites un arc en D, & du point C faites un autre arc qui coupe le premier en D avec l'ouverture du compas AB.

3°. Tirez enfin les droites CD & DB.

Théorême XVI.

Pl. III. Fig. 72. 102. La diagonale AD partage le quarré, le rectangle, le rhombe & le rhomboïde en deux parties égales : les angles diagonalement opposés sont égaux, & les côtés opposés AB & CD, AC & BD sont paralleles entre eux.

Démonstration.

Dans toutes ces figures on a AC = BD & CD = AB. (§. 20.) Les triangles ACD & ABD sont donc égaux ; de même $x = x$ & $o = o$, $u = u$, (§. 51.) & par conséquent AB est parallele à CD, & AC à BD. (§. 73.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

103. Ainsi tous ces Quadrilatéres sont des parallelogrammes. (§. 23.)

Problême XXV.

104. Trouver l'angle d'un Poligone régulier.

Solution.

1°. Divisez 360. par le nombre des côtés du poligone.

2°. Soustrayez de 180°. le nombre qui en vient : le reste sera le nombre des dégrés qui répond à l'angle donné.

EXEMPLE.

Pl. III. Fig. 73. Dans l'exagone, 360 dégrés divisés par 6 don-

nent 60 pour quotient, lequel soustrait de 180°, reste 120° pour l'angle ABC.

Demonstration.

Soit ABC l'angle que l'on cherche.

Décrivez un cercle par ces trois points ABC; (§. 97.) comme on a AB = BC, (§. 21.) les arcs AB & BC seront aussi égaux. (§. 92.) Or comme l'arc AD, moitié de l'arc ADC est la mesure de l'angle B; (§. 84.) on trouve l'arc AD, ou l'angle B en retranchant l'arc AB du demi-cercle BAD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Probléme XXVI.

105. Trouver la somme de tous les angles de quelque poligone que ce soit.

Solution.

1°. Multipliez 180 par le nombre des côtés.

2°. Soustrayez du produit le nombre 360, le reste sera la somme des angles.

EXEMPLE.

Pour le Pentagone.	Pour l'Exagone.
180	180
5	6
900	1080
360	360
540	720

Démonstration.

Pl. III. Fig. 74. D'un point pris dans quelque poligone que ce puisse être, on pourra faire de ce poligone autant de triangles qu'il aura de côtez. Si l'on multiplie donc 180 par le nombre des côtés du poligone, le produit sera la somme des angles de tous les triangles. (§. 74.)

Or tous les angles qui sont autour du centre F & qui n'appartiennent pas aux angles du poligone, font toujours 360°. (§. 42.)

Si l'on retranche donc du produit trouvé la somme 360, le reste sera la somme des angles du polygone. *Ce qu'il falloit démonter.*

Problême XXVII.

106. Décrire un polygone régulier, la droite AB étant donnée.

Solution.

Pl. IV. Fig. 75. Faites à chacune des extrémités A B des angles égaux, chacun en particulier à la moitié de l'angle du polygone; de cette façon les côtés du triangle isocele ABC se couperont mutuellement au centre du cercle C.

2°. Du point C prenez avec un compas la longueur de CA pour servir de rayon au cercle, dont vous décrivez la circonférence, que vous ferez passer par les deux points AB. Vous diviserez ensuite cette circonférence en autant de longueurs de la ligne donnée que vous pourrez.

Remarque.

On trouve dans les étuis de Mathématiques, un

demi-cercle gradué, c'est-à-dire, divisé en ses 180°. & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aisément un angle de tel nombre de dégrés que l'on veut.

Problême XXVIII.

107. Décrire un polygone régulier dans un cercle donné.

Solution.

1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du polygone demandé afin d'avoir la quantité de l'angle ACB. Pl. IV. Fig. 76.

2°. Transportez cet angle au centre du cercle C, (§. 48.) & vous aurez le côté du polygone AB, que vous appliquerez sur la circonférence autant de fois que faire se pourra.

Théorême XVII.

108. Le côté de l'exagone AB est égal au rayon du cercle AC. Fig. 76.

Démonstration.

L'angle ACB est de 60°. (§. 107.) les autres A & B sont donc de 120°. (§. 77.)

Or AC = BC, (§. 27.) on aura donc aussi A = B; (§. 79.) & par conséquent chacun étant de 60°. sera égal à l'angle C. AB sera donc égal à AC. (§. 82.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

109. On décrira donc un exagone régulier dans un cercle, si on le divise par son rayon.

Corollaire II.

110. Si l'on veut conſtruire un exagone ſur une ligne donnée : il ſuffira d'y faire un triangle équilateral. (§. 53.) car le ſommet C eſt le centre du cercle dont la circonférence doit paſſer par les angles qui forment les côtés de l'exagone.

Problême XXIX.

111. Conſtruire une figure dont on donne tous
Pl. IV. Fig. 77. les côtés, & autant de diagonales qu'il y a de côtés exceptez trois.

Solution.

Toute figure ſe réduiſant par le moyen des diagonales, en autant de triangles qu'elle a de côtés, ſi on en excepte deux, il ſuffira de conſtruire un triangle ſur un autre. (§. 55.)

Problême XXX.

112. Conſtruire une figure dont on a tous les côtés, & autant d'angles qu'il y a de côtés, exceptez trois.

Solution

Pl. IV. Fig. 78. 1°. Tirez la droite AB égale à un des côtés donnés ; aux deux extrémités A & B formez les angles requis A & B, (§. 48.) auſquels vous appliquerez les côtés AE & BC.

2°. Si l'on fait en E un angle convenable, on pourra appliquer le côté ED, & tirer enſuite la droite DC.

3°. Ou bien on fera en D un interſectiou des

points E & C, & pour lors on aura la figure que l'on demande.

Remarque.

113. Si l'on donne tous les angles excepté un, il n'est pas nécessaire que l'on donne deux côtés.

Problême XXXI.

114. Trouver *l'aire* d'un quarré.

Solution.

Mesurez un côté & multipliez la longueur par elle-même, vous trouverez dans le produit l'aire du quarré.

EXEMPLE.

Soit le côté du quarré.

	345''
	345
	1725
	1380
	1035
L'aire sera	119025''

Démonstration.

Pour mesurer une superficie, il faut prendre la superficie elle-même pour mesure. Et comme le quarré a tous les angles droits & les côtés égaux, on peut bien prendre le quarré lui-même. Si l'on divise donc le côté AB, en quatre parties égales, ou qu'il contienne 4 pieds, il est évident qu'on Pl. IV. Fig. 79.

trouvera le nombre des pieds quarrés contenus dans le grand quarré ABCD, si on multiplie ce côté par lui-même ; car on trouve dans chaque tranche du grand quarré autant de petits que le côté AB a de divisions.

Corollaire I.

115. Si le côté du quarré est divisé en dix parties, l'aire du quarré en aura 100. Et comme une toise se mesureroit en long par dix pieds, si elle étoit composée de dix, le pied par dix pouces &c. la toise de dix pieds quarrée contiendroit 100 pieds de superficie, le pied quarré 100 pouces &c.

Corollaire II.

116. Un nombre donné se diviseroit alors facilement en pouces, pieds & toises quarrées ; à sçavoir en assignant de la droite à la gauche deux chifres pour les toises, deux pour les pieds, deux pour les pouces &c.
Exemple. 119025 pouces, feroient 11 toises 90 pieds & 25 pouces.

Problême XXXII.

117. Trouver l'aire d'un rectangle.

Solution.

1°. Mesurez la largeur AB, & la hauteur BC.
Pl. IV. Fig. 80. 2°. Multipliez la premiere par la seconde, le produit sera l'aire de la figure rectangulaire.

EXEMPLE.

Soit AB =	3°.	4^{1}	5''
AD =	1	2	3
	10	3	5
	69	0	
	345		
	4°	24^{1}	35''

Démonstration.

C'est la même que celle du Problême précédent.

Théorême XVIII.

118. Deux parallelogrammes ABCD, & EFDC, qui ont la même base & la même hauteur, sont égaux entre eux. Pl. IV. Fig. 81.

Démonstration.

AC étant égal à BD, EC = FD & AE = BF, (§. 20.) & (§. 24. Arithm.) △AEC = △BFD; (§. 51.) donc si l'on ôte de l'un & l'autre le triangle BEG, ABGC = EGDF; (§. 25 Arithm.) mais si l'on ajoûte à l'un & à l'autre le triangle CDG, on aura aussi ABDC = EFCD. (§. 24 Arithm.) *Ce qu'on avoit à démontrer.*

Corollaire I.

119. Les triangles qui ont la même base & la même hauteur sont donc égaux.

Corollaire II

120. Le triangle est donc la moitié du parallelogramme qui a la même ou une base semblable, & qui est entre les deux mêmes paralleles. (§. 22.)

Problême XXXIII.

121. Trouver l'aire d'un rhombe & d'un rhomboïde.

Solution.

Pl. IV. Fig. 82. 1°. Ayant pris pour base le côté AB, abaissez dessus la perpendiculaire CE. (§. 69.)

2°. Multipliez la base AB par la hauteur CE; le produit sera l'aire que l'on cherche.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} \text{Soit AB} = 456'' \\ \text{CE} = 234 \\ \hline 1824 \\ 1368 \\ 912 \\ \hline 10^{\circ}67'04''. \end{array}$$

Démonstration.

Le rhombe ou rhomboïde ABDC est égal au rectangle, dont la base seroit AB, & la hauteur CE; (§. 118. 103) or on trouve l'aire d'un rectangle si l'on multiplie AB par CE: (§. 117.) on trouve donc aussi l'aire d'un rhombe ou rhomboïde, en multipliant AB par CE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXXIV.

122. Trouver l'aire d'un triangle.

Solution.

1°. Abaiſſez la perpendiculaire CD ſur le côté AB que vous aurez choiſi pour baſe. (§. 69.) Pl. IV. Fig. 83.

2°. Cherchez quelle eſt la longueur des lignes AB & CD, & multipliez-les l'une par l'autre.

3°. Diviſez le produit par deux, & vous aurez l'aire du triangle.

Démonſtration.

En multipliant AB par CD, le produit ſera l'aire du parallelogramme dont les côtés ſont AB & CD. (§. 117. 121.)

Or comme le triangle eſt la moitié du parallelogramme, (§. 120.) il faut donc partager en deux l'aire trouvée pour avoir l'aire du triangle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Multipliez la baſe AB par la moitié de la hauteur CD, ou la hauteur CD par la moitié de la baſe AB. Le produit ſera l'aire, du △ comme il paroît par l'exemple ſuivant.

$AB = 3^{\circ}\ 4'\ 2''$	$AB = 3^{\circ}\ 4'\ 2''\frac{1}{2}$	$AB = 1^{\circ}\ 7'\ 1''$
$CD = 234\frac{1}{2}$	$CD = 117$	$CD = 234$
1368	2394	684
1026	342	513
684	342	342
80028.	40014. ACB	40014 ACB
2) 40014. ACB.		

Problême XXXV.

123. Trouver l'aire de quelque figure rectiligne que ce soit.

Solution.

Pl. IV. Fig. 84. Comme toute figure, de l'angle B par les diagonales BE, BD, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtés, excepté deux, par exemple, le pentagone ABCDE est réduit en trois triangles ABE, BED & BCD; qu'on cherche donc l'aire de chaque triangle, selon le problême précédent, & qu'on fasse ensuite l'addition de ces trois aires, on aura celle du pentagone.

Ou si l'on abaisse les deux perpendiculaires CF & EG sur la même base BD, on trouvera l'aire du trapeze par une seule opération, en multipliant la moitié de la base BD par la somme des hauteurs EG & CF, ou la base entière par la moitié des hauteurs.

EXEMPLE.

$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3'	$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3'	$\frac{1}{2}$ EB = 4° 2'
CF = 35	EG = 45	AH = 30'
215	215	△AEB 1260'
129	172	
B CD 1505	△EBD 1935	
	△AEB 1260	
	△BCD 1505	

Aire de la figure = 4700

Corollaire I.

124. Du centre d'un cercle décrit autour d'un polygone régulier, on réduit ce polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés : car les bases de ces triangles AB, BE, EF &c. (§. 21.) & leurs côtés AC, CB, CE, CF, CG sont égaux entr'eux. (§. 27.) Donc les triangles sont égaux entre eux. (§. 51.) Pl. IV. Fig. 85.

Or si l'on trouve l'aire d'un de ces triangles, (§. 122) & qu'on la multiplie par le nombre des côtés du polygone, il est évident qu'on aura dans le produit l'aire du polygone régulier.

EXEMPLE.

$\frac{1}{2}$ AB = 2° 7'	
DC = 2 9	
243	
54	
△ABC 783	
5	nombre des côtés
Aire du pentagone = 39° 15'	

Corollaire II.

125. On voit donc aussi qu'un poligone régulier est égal à un triangle, dont la base est égale à la circonférence de tout le poligone, & la hauteur
Pl. IV. Fig. 86. égale à la perpendiculaire CD abaissée du centre C sur le côté AB (§. 119.)

Corollaire III.

126. Si l'on vouloit faire dans un cercle un polygone dont les côtés fussent infiniment petits, ils ne laisseroient pas de se trouver renfermés dans la circonférence de ce cercle, & pour lors la hauteur du triangle CD aura du rapport avec le rayon BC; ainsi un cercle seroit égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle, & la hauteur au rayon (§. 125.)

Corollaire IV.

Pl. IV. Fig. 87. 127. Donc le *Secteur* d'un cercle ACB est égal à un triangle, dont la base est l'arc AB, & la hauteur le rayon AC.

Corollaire V.

128. Ayant donc la circonférence & le diamétre d'un cercle, on trouve l'aire de ce même cercle, en multipliant sa circonférence par la quatriéme partie de son diamétre.

Remarque.

129. On a vû dans tous les siécles bien de gens rechercher à l'envie, & prendre une peine infinie pour

pour trouver le véritable rapport du diamétre d'un cercle à sa circonférence: en vain y ont-ils consacré la plûpart de leurs veilles; ils n'ont pû réussir jusqu'ici, quoique les Mathématiques soient aujourd'hui infiniment perfectionnées. Quelques-uns cependant ont essayé assez heureusement de déterminer ce rapport par approximation. Archimede dans son traité de la dimension du cercle, proposition seconde, a démontré le premier, que le rapport du diamétre à la circonférence est presque le même que celui de 7 à 22; mais comme ce rapport pèche infiniment par excès dans les grands cercles, d'autres en ont voulu déterminer un plus exact. Personne n'y a plus travaillé que Ludolphe de Ceulen ou de Cologne, qui enfin a trouvé que supposant le diamétre d'un cercle de 100 000 000 000 000 000 000, sa circonférence est de 314 159 265 358 979 323 846, peu s'en faut.

Mais comme ces chiffres sont en trop grand nombre, & font une somme trop considérable pour s'en servir à faire un calcul, on prend seulement les trois premiers caracteres de chaque somme, & l'on suppose le rapport du diamétre à la circonférence, comme 100 à 314: en quoi s'accordent Ptolomée, Viete, Huyghens, & Ludolphe de Ceulen. La proportion qu'a donné Adrien Métius est la plus exacte de toutes celles qui ont paru exprimées en nombres peu étendus, elle est, comme 113 à 355. Nous en donnerons la démonstration dans la Trigonométrie.

On conçoit aisément que tous les diamétres ont le même rapport avec leurs circonférences; car si ce rapport étoit différent selon la diversité des cercles, cette différence suffiroit pour les faire distinguer les uns d'avec les autres; ils ne seroient donc

pas tous semblables entr'eux, contre ce que nous avons démontré cy-dessus (§. 34.)

Théorême XIX.

130. L'aire d'un cercle est au quarré de son diamétre comme 785 à 1000, ou peu s'en faut.

Démonstration.

Le diamétre supposé de 100 parties, la circonférence sera de 314 (§. 129.) ainsi l'aire du cercle de 7850 (§. 128) & le quarré du diamétre 10000 (§. 114.) par conséquent l'aire sera au quarré comme 7850 à 10000, & en divisant les deux sommes par dix, l'aire sera comme 785 à 1000 (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XX.

131. Les aires des cercles sont entr'elles comme les quarrés des diamétres sont entr'eux.

Démonstration.

L'aire d'un cercle est au quarré de son diamétre, comme l'aire d'un autre cercle est au quarré de son propre diamétre (§. 129. 130) l'aire d'un cercle sera donc à l'égard de l'aire d'un autre cercle, comme le quarré du diamétre de l'un est au quarré du diamétre de l'autre (§. 83. Arith.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XXXVI.

132. Le diamétre d'un cercle étant connu, trouver sa circonférence.

Solution.

Cherchez un quatriéme nombre proportionnel à 100, 314, & au diamétre donné : (§. 85. Arithm.) ce nombre trouvé sera la circonférence que l'on cherche. (§. 129.)

Soit par exemple le diamétre $56'$.

```
100—314—56
     56
   ----
   1884
  1570
  -------
```

$17^{\circ}5'8''4'''$ Circonférence du cercle.

Problême XXXVII.

133. Ayant la circonférence d'un cercle ($17584'''$) trouver son diamétre.

Solution.

Cherchez un quatriéme nombre proportionnel à 314, 100, & à la circonférence $17584'''$ (§. 85. Arithm.) on trouvera 56 qui est le diamétre que l'on cherche.

EXEMPLE.

```
314—100—17584
          100
       -------
       1758400
18
2ø2
1758400 — 5°6'0''0''' diamétre.
314444
 3111
  33
```

Probleme XXXVIII.

134. La circonférence d'un cercle étant connue, ou son diamétre, trouver l'aire de ce cercle.

Solution.

1°. Cherchez sa circonférence (§. 132) ou son diamétre (§. 133.)

2°. Multipliez la circonférence trouvée par la quatriéme partie du diamétre (§. 128.)

Soit par exemple le diamétre 5600‴, la circonférence sera 17584‴, & par conséquent l'aire du cercle 24617600‴.

Autrement.

Multipliez le diamétre 56′ par lui-même, & cherchez un quatriéme nombre proportionnel 246176″ (§. 85. Arithm.) à 1000, 785, & le quarré trouvé du diamétre 3136, & vous aurez l'aire que vous demandez) §. 130)

Probléme XXXIX.

135. Ayant l'aire d'un cercle, trouver son diamétre.

Solution.

1°. Cherchez un quatriéme nombre proportionnel 313600 (§. 85 Arithm.) à 785, 1000 & à l'aire donnée 246176.

2°. Extrayez ensuite la racine quarrée 560. (§. 77. Arithm.) cette racine extraite sera le diamétre cherché (§. 130.)

Corollaire.

136. Si-tôt qu'on connoîtra le diamétre d'un cercle, on connoîtra aussi sa circonférence, par le Problême 36. (§. 132.)

Problême XL.

137. Ayant le rayon du cercle, AC, (6') avec la grandeur de l'arc AB, (6°.) trouver l'aire du *Secteur* ABC. Pl. IV. Fig. 87.

Solution.

1°. Cherchez un quatriéme nombre proportionnel 1884''' (§. 85. Arithm.) à 100, 314, & au rayon du cercle AC. Ce nombre trouvé est la moitié de la circonférence (§. 132. Géom.) & (§. 59. Arithm.)

2°. Cherchez ensuite un quatriéme nombre proportionnel $62\frac{4}{5}$ (§. 85. Arithm.) à 180°, à l'arc donné 6°, & à la moitié de la circonférence trouvée 1884'''. Ce nombre proportionnel donnera dans les lignes l'arc AB.

3°. Multipliez ce nombre par la moitié du rayon 300''', le produit exprimera l'aire du secteur ABC 18840''' (§. 122. 127.)

Théorême XXI.

138. Les deux parallélogrammes ABDC & BEFD de même hauteur AC, sont entr'eux, comme sont les bases CD & DF; & si les bases sont égales, ils seront entr'eux comme les hauteurs sont entr'elles. Pl. IV. Fig. 88.

Démonstration.

On a l'aire du parallelogramme AD en multi-

pliant sa base CD par AC ; & l'aire du parallélogramme BF, si l'on multiplie sa base DF par AC (117.) Ainsi ces deux parallélogrammes sont entr'eux comme les produits de AC par CD, & de AC par DF, c'est-à-dire, comme CD à DF (§. 59. Arithm.) *Premiere partie du Théorême qu'il falloit démontrer.*

On démontre de la même manière, que les parallélogrammes, dont les bases sont égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs sont entr'elles.

Corollaire.

139. Tout triangle pouvant être consideré comme la moitié d'un parallélogramme (§. 120) les triangles de même hauteur seront entr'eux comme leurs bases ; & ceux qui auront les mêmes bases, seront en même raison que leurs hauteurs.

Problême XLI.

Pl. V. Fig. 89. 140. Diviser le parallélogramme ABEC en deux parties égales, en tirant une ligne droite du point donné D.

Solution.

Faites EF = AD, & tirez la droite DF, vous aurez les Trapèzes ADFC & DBEF égaux entr'eux.

Démonstration.

Les triangles ABC & BCE sont égaux (§. 102.) & comme AB est égal & parallele à EC (§. 102.) & EF = AD, on voit que $o = x, y = u$ (§. 72.) & FC = DB (§. 25. Arithm.) donc le $\triangle$DBG = $\triangle$ GCF (§. 50.) & par conséquent le Trapèze

ACFD eſt égal au Trapèze DFEB. (§. 24. 25. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XLII.

141. L'aire d'un triangle (36′) avec ſa baſe (18′) étant connues, trouver ſa hauteur.

Solution.

Diviſez l'aire du triangle (36.′) par la moitié de ſa baſe, le quotient (4′) ſera ſa hauteur (§. 122.)

Problême XLIII.

142. Diviſer une figure rectiligne en tant de parties égales qu'on voudra. Pl. IV. Fig. 90.

Solution & démonſtration.

1°. Cherchez quelle eſt l'aire de la figure (§. 123) & diviſez-la en autant de parties égales que la figure même peut être diviſée, par exemple, en trois.

2°. Souſtrayez l'aire du triangle AED de la troiſiéme partie, & partagez le reſte par $\frac{1}{2}$AD, le quotient ſera la hauteur du triangle ADI qu'il faudra ajouter au premier AED, pour avoir la troiſiéme partie AEDI de la figure. (§. 141.)

3°. Tirez de l'étendue de la hauteur une parallele à AD (§. 67.) qui coupera AB au point I: duquel point trouvé vous pourrez tirer la droite DI.

4°. Diviſez la moitié de la troiſiéme partie par $\frac{1}{2}$DI, le quotient ſera la hauteur du triangle DIK qui fait la ſixiéme partie de la figure.

5°. Tirez une parallele à ID égale à la hauteur de ce triangle, pour avoir le point K.

6°. Divisez la sixiéme partie de toute la figure par $\frac{1}{2}$DK & de l'intervale du quotient vous tirerez une parallele à DK pour avoir le point L, & pouvoir tirer la droite KL qui coupera l'autre partie DIKL, & déterminera en même tems la troisiéme LKBC.

EXEMPLE.

Soit AD 516″, AC 580″, EH 154″, BG 315″, DF 375″, AED 39732″, ABC 91350″, ADC 108750″, ainsi l'aire entiere sera 239832″, la troisiéme partie 79944″, la sixiéme 39972″, la hauteur du △DIA 156″, du △DIK 151″ & du △DKL 139″.

Remarque.

143. Ayant fait la division sur le papier, il est très-facile de déterminer sur un terrein les points I, K & L par la quantité des droites AI, IK & DL.

Théorême XXII.

144. Dans le triangle rectangle ABC, le quarré ACFG du plus grand côté AC, est égal à la somme des quarrés BCED, & ABIH des deux autres côtés BC & AB.

Pl. IV. Fig. 91.

Démonstration.

Tirez les droites AE & BF, & BK parallele à AG (§. 67.) Le triangle BCF étant appuyé sur la même base CF que le rectangle LCFK, & entre les mêmes paralleles CF & BK, il sera la moitié de ce rectangle (§. 120.) On raisonne de la même façon sur le triangle ACE, qui sera la moitié du quarré BCED, parce que ACE se trouve sur la même base CE que BCED, & entre les mêmes parallèles AD & CE (§. 120.)

Or CF = AC, & BC = CE (§. 20.) & l'angle ACE est égal à l'angle BCF (§. 24. Arithm.) parce que ACF = BCE = 90° (§. 20. 37.) donc les triangles ACE & BCF sont égaux (§. 49.) & par conséquent le quarré BDEC sera aussi égal au rectangle LCFK (§. 26 Arithm.)

Et comme on démontre par la même méthode, que le quarré AHIB est égal au rectangle ALKG, il est évident que les quarrés AHIB & BCDE pris ensemble équivalent le quarré AGFC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

145. On nomme *Théorême de Pythagore*, le Théorême cy-dessus, parce qu'on croit qu'il en est l'inventeur. Quelques-uns l'appellent le *Maître des Mathématiques*, à cause du grand usage qu'on en fait dans toutes les parties qui composent les Mathématiques.

Problême XLIV.

146. Construire un quarré égal à deux ou plusieurs pris ensemble.

Solution.

1°. Joignez à angles droits les côtés de deux quarrés AB & BC (§. 70. 89.) Pl. IV. Fig. 91.

2°. Tirez la ligne droite AC, qui sera le côté d'un quarré égal aux deux autres pris ensemble (§. 144.)

3°. Elevez avec une équerre sur le côté du troisiéme quarré CD, la ligne CE = CA.

4°. Tirez la droite DE qui sera le côté d'un quarré égal aux trois autres pris ensemble (§. 144.)

Théorême XXIII.

147. Si les angles homologues d'une figure rec-

tiligne sont égaux, & que les droites qui les séparent ayent de part & d'autre le même rapport, les figures sont semblables: & si les figures sont semblables, les angles & les côtés seront comme nous venons de dire.

Démonstration.

Les figures rectilignes ne se distinguent que par la grandeur de leurs angles homologues, & le rapport qu'ont entr'eux les côtés qui les séparent; car on n'y connoît que cela distinctement. Si les angles sont donc égaux, & que les côtés ayent entr'eux le même rapport, on y voit précisément ce par quoi on les distingue. Ils sont par conséquent semblables. (§. 4.)

Si deux figures sont semblables, on y remarque ce qui les fait distinguer: or on ne distingue les figures rectilignes que par la quantité de leurs angles homologues, & par le rapport que les côtés ont entr'eux; la grandeur des angles & le rapport des côtés doivent donc être les mêmes de part & d'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXIV.

Pl. IV. Fig. 93.

148. Si dans les deux triangles **BAC & DFE**, B est égal à D & C=E, on aura **BA : AC=DF : FE** & **AB : BC=FD : DE**; & si les côtés sont proportionnels, les angles homologues seront aussi égaux.

Démonstration.

Comme B=D & C=E, & que de deux angles donnés avec un côté on peut construire un triangle (§. 60.); les triangles **BAC & DFE** se font de la même maniére; ils sont donc sembla-

bles (§. 33.) par conféquent BA : AC = FD : FE & AB : BC = FD : DE (§. 147.) *premiere partie démontrée.*

Dans la feconde, les trois côtés d'un triangle font proportionnels aux trois côtés de l'autre, & de ces trois côtés on peut former un triangle (§. 55.) les triangles ABC & DFE fe faifant par la même méthode, font donc femblables (§. 33.) par conféquent leurs angles homologues font égaux (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXV.

149. Si dans le triangle ABC on tire la droite DE parallele à la bafe BC, AD fera à AE, comme AB à AC, & ce que BD eft à EC, AD : DE = AB : BC. Pl. IV. Fig. 93.

Démonftration.

DE étant parallele à BC, $o = x$ & $u = y$ (§. 72.) de là AD : AE = AB : AC, & AD : DE = AB : BC, (§. 148;) par conféquent parce que AD : AB = AE : AC (§. 83. Arithm.) AD : AE = BD : EC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XLV.

150. Trouver une troifiéme proportionnelle à deux lignes données AB & AC. Pl. IV. Fig. 94.

Solution.

1°. Faites à volonté l'angle EAD, & tranfportés la ligne AC de A en C; & de A en B, auffi bien que du point C tranfportés en E la ligne AB.

2°. De C en B, tirez la droite CB, & de E

en D la droite DE parallele à CB ; fil'on fait donc l angle E égal à l'angle C (§. 8.) (§. 73) ; BD sera la troisiéme proportionnelle que l'on cherche.

Problême XLVI.

Pl. IV. Fig. 95. 151. Trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes données AB, AC, & BD.

Solution.

1°. Formez à volonté l'angle EAD.

2°. Transportez la ligne AB de A en B, la ligne AC de A en C ; & de B en D la ligne BD.

3°. Tirez de B à C la droite marquée BC.

4°. De D tirez l'autre droite DE parallele à BC, comme dans le Problême précédent, & CE sera la quatriéme ligne proportionnelle (§. 149.)

Théorême XXVI.

Pl. V. Fig. 93. 152. Si dans les deux triangles ABC & FDE, B est égal à D & AB : BC = FD : DE, A sera aussi égal à F & C = E, & BA : AC = DF : FE.

Démonstration.

Puisque B = D & AB : BC = FD : DE, & que de deux côtés réunis par un angle on peut former un triangle (§. 58 ;) les triangles ABC & FDE se faisant par la même méthode, sont semblables (§. 33) ; par conséquent A = F, C = E & BA : AC = DF : FE (§. 147.) *Ce qu'il falloit demontrer.*

Remarque.

153. Les Théorêmes sur la ressemblance &

l'égalité des triangles sont d'une très-grande utilité dans les Mathématiques. Ils font trouver quantité de choses, particulierement quand il s'agit de pratiquer la Géométrie sur un terrein ; car presque toute cette pratique est fondée sur ces principes, comme on le verra dans la suite.

Problême XLVII.

154. Diviser une ligne droite donnée en autant de parties qu'on voudra. Pl. V. Fig. 96.

Solution.

1°. Tirez la droite CD longue à volonté, & transportés-y autant de parties égales que vous en devez trouver dans la ligne donnée, par Exemple cinq.

2°. Construisez sur CD un triangle équilatéral CED (§. 53.)

3°. Transportez de E en A & E en B la ligne donnée à diviser, & tirez la droite AB qui sera la ligne donnée.

4°. Tirez enfin des droites du sommet de l'angle à chaque point de division de la ligne CD, & AF sera la cinquiéme partie de la ligne donnée AB.

Démonstration.

Puisque EA : EB = EC : ED, on a A = C & EA : AB = EC : CD (152.) Or EC = CD : donc EA = AB ; par conséquent AB = à la ligne donnée. Comme donc EA : AF = CD : CG (§. 148), c'est-à-dire, AB : AF = CD : CG, & CG = $\frac{1}{5}$ CD, on aura aussi AF = $\frac{1}{5}$ AB (§. 53. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Le triangle CED peut être consideré comme renfermé dans un cercle dont le centre seroit E, & le triangle AEB peut être aussi consideré comme renfermé dans un plus petit cercle concentrique au grand. Et comme tous les rayons partis du centre diviseroient nécessairement la circonférence du cercle concentrique en autant de parties que la circonférence du grand cercle, il est évident que le petit triangle AEB est divisé par les rayons partis du centre, en autant de parties que le triangle CED; par conséquent la ligne donnée AB est divisée en cinq parties égales, parce que la ligne CD est divisée également en autant de parties. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême XLVIII.

155. Couper une ligne droite donnée en même proportion qu'une autre CD a été coupée.

Pl. V. Fig. 97.

Solution.

1°. Formez un triangle équilateral sur la ligne coupée CD (§. 53.)

2°. Transportez la ligne donnée de E en A & B, tirez ensuite la droite AB qui sera égale à la ligne donnée.

3°. Tirez du sommet du triangle E, des lignes droites aux points de division G, I. Ces lignes couperont la ligne AB en proportion requise.

Démonstration.

Elle est la même que celle du Problême précédent.

Remarque.

156. Le Problême précédent eſt d'un très-grand uſage tant dans l'architecture militaire que civile, particuliérement quand il s'agit d'agrandir ou de diminuer un plan.

Problême XLIX.

157. Diviſer un parallélogramme ou un triangle en autant de parties égales qu'on voudra. Pl. VI. Fig. 109. & Pl. VII. Fig. 110.

Solution.

1°. Diviſez la baſe CD ou CB en autant de parties que la figure doit être diviſée (§. 154.)

2°. Si c'eſt un parallélogramme, tirez de chaque point de diviſion 1. 2. des paralleles au côté AC. 1, 1. 2, 2. (§. 67.) ſi c'eſt un triangle, tirez des droites des points de diviſion 1. 2 au ſommet A, & chaque figure ſera diviſée en parties égales. (§. 138. 139.) Fig. 109. Fig. 110.

Problême L.

158. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données AB & BE. Pl. VII. Fig. 111.

Solution.

1°. Joignez en ligne droite & bout-à-bout, les deux lignes données, & diviſez leur longueur commune AE en deux parties égales au point C (§. 90)

2°. De C comme centre décrivez un demi-cercle dont le diamétre ſoit AE.

3°. Au point B élevez la perpendiculaire BD

(§. 70.) qui sera la moyenne proportionnelle demandée

Démonstration.

L'angle ADE est droit (§. 86.) ABD est aussi un angle droit (§. 18.) l'angle DAB est commun aux deux triangles DAB & DAE. L'angle DAE est donc égal à l'angle DEB (§. 78.) Or dans le triangle DEB, l'angle DBE est aussi droit (§. 18) AB est donc à BD comme BD à BE (§. 148) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

159. Si l'on prenoit une ligne pour une unité, & qu'on exprimât un nombre donné par une autre ligne, on pourroit en extraire facilement la racine quarrée, en se servant de l'échelle géométrique, & de la méthode qu'on a employé dans le problême ci-dessus. (§. 74. Arithm.)

Remarque seconde.

160. On peut faire aussi la régle de trois par le moyen des lignes, en suivant ce que nous avons dit au Problême 46. (151.)

Problême L I.

Pl. VII. Fig. 112. 161. La corde d'un arc AB, & sa hauteur DF étant données, trouver le diamétre ED, & par conséquent le centre du cercle C.

Solution & Démonstration.

1°. Cherchez une troisiéme proportionnelle à FD & FB (§. 85. Arithm.) pour avoir EF (§. 158.)

2°.

2°. Ajoutez à EF la hauteur de l'arc DF, & vous aurez le diamétre ED.

3°. Coupez le diamétre en deux parties égales pour avoir le rayon EC qui donne le centre.

EXEMPLE.

Soit DF $8^{I}\ 3^{II}$ FB $1^{o}\ 6^{I}\ 6^{II}$.

```
83 — 166 — 166
      166          1
   --------
      996         22
     996          366
    166          27556
   --------      8333
    27556         88

                         332''  EF
                          83    DF
                         ------
                         415''  ED
                    2)  2075''' EC
```

Remarque.

162. Ce problême est en usage dans l'Architecture civile, quand il s'agit de faire des portes & des fenêtres en forme d'arc.

Problême LII.

163. Ayant la corde d'un arc AB avec sa hauteur DF, trouver l'aire du segment ADBFA. Pl. VII. Fig. 112.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le diamétre DE, (§. 161.) décrivez ensuite le cercle, auquel vous appliquerez la corde AB.

2°. Mesurez avec le rapporteur l'angle ACB. (§.43.)

4°. De la corde donnée AB & de la différence FC qui se trouve entre la hauteur de l'arc FD & le rayon DC, cherchez l'aire du triangle ABC. (§. 122.)

5°. Soustrayez enfin le triangle ACB du secteur ACBDA, le reste sera le segment ADBFA.

Soit pour exemple.

AB 600‴, DF 80‴; DE sera 1205‴, l'arc AB 60°, l'aire du secteur ACBDA sera donc 189630‴. Or comme FC 522‴, AF 300‴, le △ ACB sera 156600‴ & par conséquent le segment AFBDA 33030‴.

Problême LIII.

164. Construire *l'échelle géométrique.*

Pl. V. Fig. 98.

Régle.

1°. Tirez la droite AE, transportez sur cette ligne dix parties égales prises à volonté, en commençant depuis A, la dixiéme sera B. Vous prendrez ensuite la distance AB que vous transporterez de B en E autant de fois qu'il vous plaira.

2°. Elevez au point A la perpendiculaire AC, que vous diviserez aussi en dix parties égales & arbitraires. (§. 70.)

3°. De chaque point de division menez des paralleles à AE, (§. 67.) & sur la derniere CF, vous transporterez de C en D les dix parties égales AB.

4°. Joignez par des lignes droites la premiére partie à gauche marquée 10 avec la seconde à droite marquée 9, puis 9 de la gauche avec 8 de la droite, ensuite 8, de la gauche avec 7 de la droite, & ainsi de suite comme la figure le marque.

Il est évident que si AB est supposé être une lon-

gueur de dix pieds, les parties B 1; 1, 2;2, 3; &c. feront des pieds. A l'égard des petits chiffres qui font au haut de la figure, fur les divifions perpendiculaires, 9, 9 vaudra un pouce; 8, 8 deux pouces; 7, 7 trois; 6, 6 quatre pouces, &c.

Démonftration.

Dix pieds, ou fi l'on veut dix parties font la mefure Géométrique. (§. 10) Il eft donc clair que les parties de la droite AB font des pieds. On demontre ainfi que 9, 9 font un pouce, 8, 8 deux; 7, 7 trois; &c. 9, 9 eft parallele à C 9: comme A 9 eft à AC, ainfi fera 9, 9 à C 9. (§. 149.) Or comme A $9 = \frac{1}{10}$ AC, on aura donc $9, 9 = \frac{1}{10}$ C 9, & fera par conféquent un pouce (§. 9.) &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

La mefure géométrique étant divifée en dix, on peut confidérer ces parties comme des pieds. Mais dans ce cas, pour entendre la démonftration précédente, il faut auffi fuppofer que le pied n'eft compofé que de dix pouces; ce dont il faut bien fe fouvenir, parceque M. Wolf fe fervant communément de cette maniere de compter, la plufpart de fes calculs, folutions, ou démonftrations feroient inintelligibles fans cette attention. J'ai cependant réduit prefque partout fes calculs à la maniere de compter ufitée en France.

Corollaire.

165. Si l'on met donc la jambe d'un compas fur la troifiéme ou feptiéme ligne, & qu'on l'ouvre jufqu'à ceque l'autre jambe tombe fur la ligne droite menée au-deffous de la cinquiéme divifion, cette

ouverture donnera 5 pieds 3 ou 7 pouces. Ou bien si je veux avoir 2° 3″ & 5‴, je poserai une jambe du compas sur la cinquieme paralléle à AE au point I, & j'ouvrirai le compas jusqu'à ce qu'il rencontre K sur la même paralléle, cette ouverture de compas me donnera ce que je demande.

Problême LIV.

Pl. V. Fig. 99. 166. Mesurer la distance des deux lieux A & B accessibles par un troisiéme D.

Solution.

1°. Posez en C le Graphométre ou table géométrique, sur laquelle vous choisirez le point *c*.

2°. De ce point, par le moyen des pinnules visez au point A, & menez la droite *c a*.

3°. Bornoyez ensuite du point *c* vers B, & menez la droite *c b*.

4°. Mesurez les toises qui se trouvent depuis C jusques à A, & depuis C jusques à B, transportez ces mesures, au moyen de l'échelle géométrique, de *c* en *a* & de *c* en *b*.

5°. Mesurez enfin sur la même échelle la ligne *ab*, qui marquera la distance que vous cherchez.

Démonstration.

L'angle *c* étant commun aux deux triangles *acb* & A*c*B, & les cotés qui le forment étant aussi proportionnels, on doit conclure que *ab* est à AB comme *ca* est à *c*A. (§. 152.) Or *ca* contient autant de parties de l'échelle ou petite mesure, que *c* A en contient de la grande : *ab* contiendra donc autant de parties de la petite mesure, que AB en contiendra de la grande dont on s'est servi sur le terrein.

Autre Solution.

1°. Ayant posé le graphométre en C, mesurez l'angle A *c* B. (§.43.)

2°. Mesurez aussi les lignes *c*A & *c*B. (§. 44.)

3°. A l'aide du rapporteur & de l'échelle géométrique construisez l'angle *acb*. (§. 58.)

4°. Mesurez la ligne *ab* sur l'échelle géométrique, (§. 164.) vous connoîtrez par-là combien la ligne AB contient de toises, pieds & pouces &c.

Démonstration.

Elle revient au même que celle que j'ai donné à la prémiere Solution.

Problême LV.

167. Trouver la distance de deux lieux A & B, dont un seul A est accessible. Pl. V. Fig. 100.

Solution.

1°. Ayant posé le graphométre dans un lieu choisi à volonté C, dirigez votre vûe par les pinnules du point *c* vers les deux points A & B.

2°. Cherchez la distance de C au point accessible A.

3°. Transportez cette distance avec une échelle géométrique, de *c* en *a*. (§. 164.)

4°. Placez ensuite le graphométre au point A, ensorte que *a* soit précisément sur A, & que vous puissiez voir un piquet planté au point C par les pinnules dirigées de *a* vers *c*.

5°. Bornoyez alors de *a* vers B & tirez la droite *a b*.

6°. Prenez enfin sur l'échelle géométrique (§. 164.) la distance de *ab*, qui vous fera connoître celle de A B.

Démonstration.

Puisque l'angle $c = C$ & l'angle $a = A$, *ac* sera à l'égard de AC comme *ab* est à AB. (§. 148.) Or la ligne *ac* contient autant de parties de l'échelle géométrique ou petite mesure, que la ligne AC en contient de la grande : *ab* doit donc contenir autant de parties de la petite mesure ou échelle géométrique, que AB en renferme de la grande. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On entend par *grande mesure* une toise ou perche, qui seroit divisée en pieds, pouces &c. comme elles le sont communément. Il faut aussi remarquer que si l'échelle géométrique ou petite mesure dont on se sert est divisée par 10, il faudra, ou que la perche qui sert à mesurer en grand les distances, soit aussi divisée par 10 pieds ou parties, ou faire la réduction en comparant la grande mesure avec la petite; par exemple, supposé qu'on se serve d'une toise ordinaire composée de 6 pieds, qui contiennent chacun douze pouces, pour mesurer la distance *c* A de l'exemple ci-dessus, & que cette distance soit de six toises quatre pouces ; si mon échelle géométrique, au lieu d'être divisée par toises de six pieds, est divisée par mesure géométrique de dix parties, qu'on peut considérer comme des pieds ; pour réussir à comparer proportionnellement le nombre des toises qui se trouvent dans la distance *c*A, avec le nombre des parties qui sont

Pl. V. Fig. 100.

comprises dans l'échelle géométrique, dont les divisions sont de dix en dix ; il faudra dans ce cas, réduire les toises en pieds, & en compter autant qu'il se trouvera de parties dans l'échelle géométrique, pour les rapporter de *c* en *a*. Ainsi pour plus grande commodité, il faudroit avoir une échelle géométrique divisée par six, quand on se servira d'une toise, parce qu'une toise est composée de six pieds ; & qu'il sera pour lors facile de prendre sur l'échelle géométrique autant de divisions, qu'il se trouvera de toises dans la distance proposée.

Autre maniere de résoudre le problême ci-dessus.

1°. Mesurez avec le graphométre les angles C & A (§. 43.) & la longueur. AC. (§. 44.) Fig. 100.

2°. De ces distances connues, construisez le le triangle *acb* ; (§. 60.) par le moyen du rapporteur & de l'échelle géométrique.

3°. Mesurez ensuite la ligne *ab* selon les divisions de l'échelle géométrique ; & vous connoîtrez ainsi la distance AB.

Démonstration.

Elle est la même que celle que j'ai donnée en dernier lieu.

Problême LVI.

168. Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles AB. Pl. V. Fig. 101.

Solution.

1°. Ayant choisi les deux stations C & D, placez le graphométre à la premiere C, & plantez un piquet à l'autre.

2°. Du point C bornoyez par les pinnules vers le piquet D, & puis du même point C ayant aussi bornoyé vers B & A, tirez les lignes droites sur le graphométre.

3°. Prenez la distance des stations CD, (§. 44.) & portez-la sur le graphométre de *c* en *d*, par le moyen de l'échelle géométrique.

4°. Visez de D vers A & B, & tirez sur le graphométre les droites *da* & *db*.

6°. Prenez ensuite la distance *ab* sur l'échelle géométrique, (§. 164.) & vous connoîtrez ainsi la distance AB.

Demonstration.

Comme l'angle *d* est commun aux deux triangles *dcb* & DCB, & que l'angle *c* est égal à l'angle C, *cd* est à CD comme *bc* est à BC. (§. 148.) D'ailleurs comme par la même raison le triangle *acd* est semblable au triangle ACD; *cd* sera à CD comme *ac* est à AC; (§. 148.) & par conséquent *bc* est à BC, comme *ac* à AC. (§. 57. Arithm.)

Or l'angle *acb* étant égal à l'angle ACB, *ab* sera à AB comme *ac* est à AC, (§ 152.) ou *cd* à CD. (§. 57. Arithm.) Et comme dans l'échelle géométrique, autant de parties répondent à la droite *dc*, qu'il s'en trouve dans la grande mesure qui répondent à la droite DC: il en faut autant dans l'échelle géométrique qui répondent à la ligne *ab*, qu'il s'en trouvera qui répondent à AB dans la grande mesure dont on s'est servi sur le terrein.

Autre solution du même Problême.

Pl. VI. Fig. 102. 1°. Mesurez les angles *x* & *y* de la premiere station C, & les angles *z* & *w* de la seconde D; (§.

43.) leurs sommes donneront les angles ACD & BDC.

2°. Prenez ensuite la distance de CD, (§. 44.) que vous porterez sur le papier au moyen de l'échelle géométrique, & avec les angles x & $z + w$, formez le triangle BCD, & puis l'autre ACD avec les angles z & $x + y$. (§. 60.)

3°. Mesurez enfin la ligne AB sur l'échelle géométrique, & vous trouverez la distance que vous cherchez.

Démonstration.

On démontre cette seconde solution par le même raisonnement que l'on a apporté pour démontrer la premiére.

Remarque.

169. On mesurera diverses distances par la même méthode, si de deux stations marquées, on bornoye à chaques lieux en particulier.

Problême LVII.

170. Mesurer la hauteur accessible AB. Pl. VI. Fig. 103.

Solution.

1°. Prenez un point D dans la campagne sur lequel vous éleverez verticalement votre graphométre ou *planchette*, de façon que le côté inférieur soit parallele à l'horison : situation qu'on lui donnera avec un *niveau*.

2°. Ayant appliqué horisontalement une régle avec des pinnules sur le centre, vous bornoyerez à travers du côté de l'endroit dont vous cherchez

à connoître la hauteur, & vous menerez ensuite la droite *c* E.

3°. Tournez la régle autour du point *c* jusqu'à-ce qu'en regardant par les pinnules, vous apperceviez le sommet de la hauteur A, & pour lors vous menerez sur le graphométre la droite *cb*.

4°. Mesurez la distance qu'il y a depuis *c* jusques au bas de la hauteur C, (§. 44.) & portez-la sur le graphométre de *c* en E, par le moyen de l'échelle géométrique.

5°. Elevez au point E la perpendiculaire E *b*, (§. 70.) qui marquera par son application sur l'échelle géométrique la hauteur AC. (§. 164.)

6°. Ajoûtez à cette hauteur celle de CB, & la somme sera celle que vous demandez.

Démonstration.

L'angle *c* est commun aux deux triangles E*cb* & C*c*A : les angles EC sont droits : ainsi *c*E est à *c*C comme *b*E est à AC. (§. 148.) Or E*c* contient autant de parties de l'échelle géométrique, que *c*C en contient de la grande mesure ; E*b* contiendra donc nécessairement autant de parties de l'échelle géométrique, que AC en contient de la grande mesure dont on s'est servi pour mesurer le terrein.

Autre Solution du même problême.

Pl. VI. Fig. 103. 1°. Mesurez l'angle *c*, (§. 43.) & la distance des stations *c*C ou DB. (§. 44.)

2°. De ces mesures trouvées, formez le triangle *ebc*. (§. 60.)

3°. Prenez la mesure de la hauteur *be* sur l'échelle géométrique, & vous aurez la hauteur AC.

4°. Ajoutez à AC, la hauteur de l'instrument, la somme vous donnera la même hauteur AB.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque.

171. On suppose dans toutes ces solutions de problême, que la ligne DB est horisontale : Car si l'instrument étoit posé plus haut ou plus bas que la hauteur AB ; il faudroit aussi mesurer l'angle C*c*B, & construire le triangle C*c*B sur le papier par le moyen de l'échelle géométrique, & puis l'ajouter à la hauteur si l'instrument est plus haut, ou l'en retrancher s'il étoit placé plus bas que A.

Problême LVIII.

172. Mesurer une hauteur inaccessible AB. Pl. VI. Fig. 104.

Solution.

1°. Après avoir choisi à volonté les deux stations D & E, comme dans le problême précédent, bornoyez vers la pointe A, & le bas C, étant placé à la premiere station D.

2°. Mesurez la distance des deux stations ED, (§. 44.) & portez-la, par le moyen de l'échelle géométrique, du point *f*, qui doit répondre perpendiculairement sur D, au point *e*. (§. 164.)

3°. Transportez le graphométre de D en E, & posez-le de façon que *e* soit précisément sur E, & visez ensuite au piquet que vous aurez planté en D, & au sommet A.

4°. Au point où la droite *ea* coupe la droite *fa*, abaissez une perpendiculaire *ac* sur *fe*, (§. 69.)

qui portée sur l'échelle géométrique donnera la hauteur AC.

5°. Ajoutez à AC la hauteur BC, la somme sera la hauteur AB que l'on demande.

Démonstration.

On démontre cette solution comme celle du problême précédent.

Autre méthode pour résoudre le même problême.

Pl. VI. Fig. 104. 1°. Mesurez à la première station D l'angle *f*, & à la seconde E l'angle *e*; (§. 43.) & prenez aussi la distance des stations ED (§. 44.) que vous transporterez sur le papier selon l'échelle géométrique. (§. 164.)

Fig. 105. 2°. Construisez-y le triangle *fea* par le moyen des angles *e* & *f*. (§. 60.)

3°. Prolongez la base *fe* jusques en *c*, & abaissez de *a* la perpendiculaire *ac*. (§. 69.)

5°. Mesurez enfin *ac* sur l'échelle géométrique, (§. 164.) & ajoutez la hauteur de l'instrument, d'où vous avez pris la quantité des angles, ou faites attention à ce que nous avons dit, (§. 171.) & vous aurez ainsi la hauteur que vous souhaitiez.

La démonstration est la même que la précédente.

Problême LIX.

173. Lever le plan de quelque figure rectiligne que ce soit, accessible dans toutes ses parties, comme ABCDE.

Pl. VI. Fig. 106.

Solution.

Mesurez la longueur de chaque côté AB, BC,

CD, DE, EA; auſſi-bien que les diagonales AC & AD; portez enſuite ces longueurs ſur le papier, par le moyen de l'échelle géométrique, & vous en formerez votre figure. (§. 164. & 111.)

Démonſtration.

Lorſqu'on veut tranſporter le plan d'une figure ſur le papier, on doit l'y deſſiner de façon que chaque angle & chaque côté de la figure deſſinée ſoient égaux en petit à chaque angle & chaque côté de la grande figure auſquels ils répondent. Si donc, pour faire chaque côté des triangles ABC, ACD, ADE, on prend ſur l'échelle géométrique autant de parties qu'il s'en trouve ſur le terrein qui forment chaque côté de la grande figure, les côtés de la petite ſeront entr'eux comme les côtés de la grande. Car ſi, par exemple, le côté AB en a 6, & BC 7 ſur le terrein, le côté AB ſur le papier en aura auſſi 6, & BC 7: & par conſéquent, tant dans l'une que dans l'autre figure, AB ſera à BC comme 6 eſt à 7: les angles & les côtés de la petite figure ſeront donc égaux proportionnellement à ceux de la grande; (§. 148.) & puiſque les angles de la figure conviennent avec ceux des triangles, il faut néceſſairement que les angles de la petite figure, ſoient égaux à ceux de la grande qui eſt ſur le terrein. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode pour réſoudre le problême

1°. Placez le graphométre à un point F choiſi dans la figure. Pl. VI. Fig. 107.

2°. Bornoyez du point F vers chaque piquet, que vous aurez eû ſoin de planter auparavant à cha-

que angle de la figure A, B, C, D, E; menez ensuite les droites F*a*, F*b*, F*c*, F*d*, F*e*.

3°. Prenez la mesure des lignes FA, FB, FC, FD, FE. (§. 144.)

4°. Déterminez par le moyen de l'échelle géométrique, les lignes F*a*, F*b*, F*c*, &c. (§. 164.)

5°. Menez enfin les lignes droites *ab*, *bc*, *cd*, *de* & *ea*; & vous aurez sur le papier le plan de la figure ABC, &c.

Démonstration.

Dans le triangle *a*F*b* on voit que F*a* est à F*b* comme FA est à FB dans le triangle AFB, & que l'angle F est commun aux deux triangles: F*b* est donc à FB comme *ba* est à BA. (§. 152.) On démontre par la même raison que F*b* est à FB comme *bc* à BC. (§. 57. Arithm.) D'ailleurs l'angle ABC est égal à l'angle *abc*. (§. 152.) Et comme on démontre par la même raison que les autres angles *c*, *d*, *e*, *a* sont égaux aux angles C, D, E, A, & que les autres côtés sont entre eux comme les côtés CD, DE, EA; il est évident que le plan est juste. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Troisiéme méthode.

Fig. 107. 1°. Du point F mesurez les angles AFB, BFC, CFD, DFE, EFA. (§. 43.) Mesurez aussi les lignes FA, FB, FC, FD & FE. (§. 44.).

2°. Portez les angles (§. 48.) & les lignes sur le papier, par le moyen de l'échelle géométrique. (§. 164.)

3°. Mesurez les droites *ab*, *bc*, *cd*, *de* & *ea*; & vous aurez la figure telle que vous la demandez.

Démonstration.

Voyez la précédente.

Problême L X.

174. Lever le plan de la figure ABCDE que l'on peut voir toute entiére des deux stations A & B. Pl. VI. Fig. 108.

Solution.

1°. Ayant posé votre graphométre en A, bornoyez vers tous les angles de la figure B, C, D & E, & menez des lignes du point A vers tous ces angles.

2°. Mesurez la distance des stations AB, (§. 44.) & portez-les sur le graphométre par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164.) de A en *b*.

3°. Transportez l'instrument de A en B & placez-le de façon que le point *b* réponde perpendiculairement à B, & qu'en visant par les pinnules de la régle appliquée sur la ligne *b*A, vous puissiez voir le piquet que vous aurez eû soin de planter en A après en avoir ôté le graphométre.

4°. Visez ensuite de B vers tous les autres angles de la figure en particulier, & menez des droites qui couperont les premiéres en *e*, *d*, *c*.

5°. Tirez enfin les droites *ed*, *dc*, après quoi le plan sera levé.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du problême 56. (§. 168.)

Seconde méthode.

Fig. 108. De A mesurez aussi les angles CAB, DAC, EAD, & de B mesurez aussi les angles EBA, DBE, CBD, (§. 43.) & puis encore la distance AB. (§. 44.)

2°. Marquez sur le papier la ligne *ab*, & par le moyen de l'échelle géométrique, (§. 164.) portez-y la longueur de la ligne AB.

3°. Transportez en *bac*, *cad*, *dae*, les angles CAB, DAC & EAD: & en *abe*, *ebd*, *dbc* les angles ABE, EBD, DBC. (§. 48.)

4°. Joignez enfin par des droites les points *a*, *e*, *d*, *c*, *b*, & pour lors vous aurez tout le plan de la figure.

Démonstration.

Voyez celle du problême 56. (§. 168.)

Problême **LXI.**

175. Lever le plan d'une figure dont on peut faire le tour, comme ABCDE.

Pl. VI. Fig. 108.

Solution.

1°. Après avoir placé le graphométre au point A, bornoyez vers les piquets plantés en B & E, afin de pouvoir marquer sur ce point l'angle BAE ou *bae*.

2°. Prenez la mesure des droites AB & AE, (§. 44.) & transportez-les sur le graphométre de *a* en *b* & *e*, à l'aide de l'échelle. (§. 164.)

3°. Transportez l'instrument en B de maniére que *b* soit perpendiculaire à B, bornoyez ensuite vers A & vers C, afin de pouvoir marquer sur le graphométre l'angle BCA.

4°.

4°. Prenez la mesure de la ligne BC, (§. 44.) & portez-la sur l'instrument de *b* en *c*, (§. 164.) & en faisant ainsi le tour de la figure vous en aurez levé tout le plan.

Démonstration.

Tous les angles de la figure marquée sur le graphométre sont égaux à ceux de la figure répresentée sur le terrein, & les côtés de la petite sont entre eux comme les côtés de la grande : la petite est donc semblable à la grande. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Mesurez tous les côtés (§. 44.) & autant d'angles qu'il y a de côtés, exceptez trois. (§. 43.) Car il est aisé de lever un plan dont on connoît les côtés & les angles. (§. 112.)

Problême LXII.

176. Trouver l'aire de quelque terrein ou champ que ce puisse être.

Solution.

1°. Levez d'abord le plan du terrein selon la méthode marquée dans les problêmes précédents.

2°. Cherchez l'aire de la figure selon la solution du problême 35. (§. 123.)

D E F I N I T I O N XVI. Pl. VII. Fig. 113.

177. La sphére se forme en faisant tourner le demi-cercle ACB autour du diamétre AB.

Corollaire.

178. Tous les points de la ſuperficie d'une ſphére ſont donc dans une égale diſtance du centre (§. 13.)

DEFINITION XVII.

Pl. VII. Fig. 114. 179. Une figure rectiligne ABC, dont les lignes droites AD ſont portées de haut en bas, ou de bas en haut par un mouvement toujours parallele à lui même, repréſente un *priſme*, qui eſt un corps ſolide terminé aux deux bouts par des plans polygones, égaux, ſemblables & paralleles, & dans ſa longueur, par autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés aux deux polygones qu'on nomme les *baſes*. Quand ces deux baſes ſont des triangles, le priſme ſe nomme triangulaire; tel eſt celui qui eſt répréſenté dans la figure citée à la marge.

Remarque.

On nomme *priſmatique*, ce qui a la figure d'un priſme, ou qui a quelque rapport au priſme: & *verres priſmatiques* ceux dont on ſe ſert pour ſéparer les rayons de la lumiere. On appelle auſſi *couleurs priſmatiques* les rayons colorés de lumiere qu'un priſme de verre fait appercevoir.

Fig. 115. Si le cercle X eſt porté de bas en haut, ou de haut en bas en ſuivant la droite FG, il forme la figure d'un *cylindre*; la même choſe arrive quand Fig. 116. un rectangle ABCD, ou un quarré tourne autour de ſa hauteur EC.

Corollaire I.

180. Tout cylindre eſt donc un ſolide composé

de plusieurs plans circulaires, égaux & concentriques : le premier & le dernier de ces cercles prennent le nom de *bases*, & la ligne BC qui passe par tous les centres, se nomme *l'axe* du cylindre. Pl. VII. Fig. 115.

Cylindrique se dit d'une figure ou corps solide qui a la forme d'un cylindre ; ce qui doit s'entendre d'une cavité, comme d'un corps solide.

Un corps de pompe doit être intérieurement bien cylindrique. Tout prisme a deux bases & est terminé tout à l'entour par autant de parallélogrammes que sa base a de côtés.

Corollaire II.

181. Toutes les sections d'un prisme ou d'un cylindre, paralleles à la base, sont égales entr'elles.

Definition XVIII.

182. Si le rectangle ABCD est porté en droite ligne de A en E il décrit un *parallelipipede* : & si Fig 117. le quarré O est pareillement porté de H en I, il Fig. 118. forme le *cube*.

Corollaire I.

183. Le Parallelepipéde est donc terminé par six rectangles, dont les deux côtés opposés sont égaux entre eux, & les sections de la base sont paralleles entr'elles.

Corollaire II.

184. Le cube ou *exaëdre* est donc terminé par six *faces* ou quarrés égaux entre eux ; tel est un dez à jouer.

DEFINITION XIX.

Pl. VII. Fig 119. 185. Si le triangle rectangle ABC fait une révolution sur un de ses côtés immobile AB, il décrit le *cône*.

Corollaire.

186. Toutes les sections paralléles à la base d'un cône, sont des cercles, d'autant plus petits qu'ils approchent plus du *sommet* ou *pointe* A; la ligne AB se nomme *axe* du cône, & le cercle DBC sa *base*.

On appelle aussi *cône* un solide qui est produit par le mouvement d'un triangle obliqu'angle, c'est-à-dire, qui n'a point d'angle droit: & alors pour le distinguer d'avec le précédent, que l'on peut appeller *cône droit*, on le nomme *cône incliné* comme GHI, qui est produit par le mouvement du triangle obliqu'angle GOH, au-tour du côté immobile GO. Fig. 120.

DEFINITION XX.

187. Si l'on méne la droite AD, fixée par une de ses extrémités au point D, tout autour de la circonférence d'une figure rectiligne ABC, elle décrit la figure d'une *Pyramide*. Fig. 121.

Corollaire.

188. La *Pyramide* est un solide à plusieurs faces, qui a pour *base* une figure rectiligne, & est terminée par autant de triangles, que la base a de côtés, mais qui vont toujours en diminuant aboutir au point D; si la figure ABC est circulaire, le mouvement de la droite AB formera un *cône*.

Definition XXI.

189. Un *corps régulier* eſt un ſolide terminé par des plans égaux, réguliers, de même eſpéce, dont les angles ſolides ſont égaux entre eux : les autres corps ſe nomment *irreguliers*.

Definition XXII.

190. Outre le cube (§. 182.) il y a encore quatre autres ſortes de corps réguliers, à ſçavoir le *Tetraëdre* compoſé de quatre triangles équilatéraux ; l'*Octaëdre*, de huit ; l'*Icoſaedre* de vingt : & le *Dodécaedre* formé par douze pentagones. Pl. VII. Fig. 123. 124. 125. & 126.

Problême LXIII.

191. Déterminer la ſolidité d'un cube.

Solution.

On meſure les ſolides avec une *perche cubique* ; c'eſt-à-dire, un cube dont chaque côté eſt une perche de long & de large, qu'on nomme encore *perche courante*. Elle ſe diviſe en pieds, en pouces &c. cubiques. Les premiers ſont cubes, dont un côté eſt égal à un pied, & les ſeconds ſont auſſi cubes, quand leur côté eſt égal à un pouce.

Quand vous voudrez donc déterminer la ſolidité d'un cube.

1°. Meſurez un côté du cube, & le multipliez par lui-même ; le produit donne la baſe. (§. 114. 184.)

2°. Multipliez ce produit par les côtés, & le ſecond produit donnera la ſolidité du cube.

3°. Si vous multipliez la baſe par ſix, vous au-

rez la surface de tout le cube. (§. 184.)

EXEMPLE.

Côté	34'		
	34	Base	1156'
	136		34
	102		4624
Base	1156		3468
	6	Solidité du cube	39304'
Superficie du cube			6936'

Démonstration.

Pl. VII. Fig. 127. Si l'on forme, par imagination, un cube dont un côté est divisé en parties égales, il est évident qu'il en naîtra autant de lits de moindres cubes, posés les uns sur les autres, que la hauteur aura de parties. Il n'est pas moins constant que chaque lit contiendra autant de petit cubes, que la base contiendra de quarrés. D'où l'on doit conclure, qu'en multipliant la base par la hauteur, le produit donnera le nombre des moindres cubes contenus dans le plus grand. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

192. Si donc le côté d'un cube est de 10, sa solidité sera de mille. Si un côté contient dix pieds cubes, il s'en trouvera par conséquent mille dans le grand cube. Ainsi la perche cubique contient donc 1 000 pieds cubiques, le pied cubique 1 000 pouces cubiques, le pouce cubique 1000 lignes cubiques.

Remarque.

Ne perdez pas de vûe ce que nous avons dit dans la remarque qui ſuit immédiatement la démonſtration de la ſolution du problême 55. (§. 167.)

Théorême XXVII.

193. Les parallélipipedes, les priſmes, les cylindres, dont les baſes & les hauteurs ſont égales, ſont auſſi égaux.

Demonſtration.

Si l'on coupe par imagination un parallélepipede, un priſme, un cylindre, en forme de *diſques* de ſi petite épaiſſeur qu'on puiſſe les imaginer : ces diſques ſeront non ſeulement égaux entre eux ; (§. 181. 183.) mais il arrivera même que ſi deux corps ont la même hauteur, on pourra tirer autant de diſques de l'un que de l'autre : ces corps occuperont donc un eſpace égal ; ce qui eſt évident par la ſeule ſuppoſition de l'égalité de leur hauteur & de leur baſe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême LXIV.

194. Meſurer la ſolidité & la ſuperficie d'un parallélipipéde.

Solution.

1°. Multipliez la longueur AB par la largeur BC, pour trouver la baſe ABCD. (§. 117. 183.) Pl. VII. Fig. 118.

2°. Si vous multipliez cette baſe par la hauteur BF, vous aurez la ſolidité.

Soit par exemple AB 36′		BC 15′ BF 12′	
longueur AB	36	base	540
largeur BC	15	hauteur	12
	180		1080
	36		54
Base ABCD	540	solidité	6480

Pour la superficie.

1°. Multipliez AB par BC, & AB par BF & BF par BC pour avoir les quadrilatères BD, EB BG (§. 117. 183.)

2°. Ajoutez ces trois quadrilatères, & multipliez la somme par 2; le produit sera la superficie du parallélipipéde (§. 117. 183.)

EXEMPLE.

AB 36′	AB 36′	BC 15′
BC 15	BF 12	BF 12
180	72	30
36	36	15
□ DB 540	□ BG 432	□ BE 180′

□ BG 432
□ BE 180

1152′
2

2304′ Superficie du Parallélipipéde.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente. (§. 191.)

Théorême XXVIII.

195. Le plan diagonal DBFH, divisera le parallélipipéde en deux prismes égaux. Pl. VII. Fig. 128.

Démonstration.

La diagonale DB divise le parallélogramme ABCD en deux triangles égaux (§. 102.) Or comme les prismes ADBFGH & DBCEFH ont les bases égales, & la même hauteur DH; ils seront donc aussi égaux (§. 193.) *Ce qu'il falloit demontrer.*

Problême LXV.

196. Mesurer la solidité & la superficie d'un prisme. Fig. 129.

Solution.

1°. Cherchez la base du prisme (§. 117. 121. 122. 123. 124.)

2°. Multipliez cette base par la hauteur, le produit sera la solidité que vous cherchez.

3°. Multipliez la circonférence entiére de la base par la même hauteur, le produit exprimera la superficie, après qu'on en aura rétranché les bases.

4°. Si on les y ajoute on aura la superficie entière (§. 180.)

EXEMPLE.

Soit AB 8' CD 6'		AE	15'
AB 8'		ABC	24'
$\frac{1}{2}$ CD 3		AE	15'
ABC 24'			120
			24
Solidité du Prisme			360'
	BC 91''		
	AB 80		
	AC 62		
Circonférence	233''		
AE	15.0		
	11650		
	233		
Superficie sans bases	34950''		
ABC —	2400		
HEI	2400		
Superficie entière	39750''.		

Démonstration.

Le prisme triangulaire est la moitié du Parallélipipéde, qui a la même hauteur avec une double base (§. 195.) Si on multiplie donc la base du parallélipipede par sa hauteur, le produit sera sa solidité (§. 194.) Si l'on multiplie aussi la base du prisme, qui est la moitié du parallélipipéde par la hauteur, on aura la moitié du parallélipipéde, c'est-à-dire la solidité du prisme. Comme tous les autres prismes peuvent se réduire en triangles, il faut leur

appliquer les démonſtrations que nous avons données en parlant des triangles.

Problême LXVI.

197. Trouver la ſolidité & la ſuperficie d'un Cylindre par ſon diamétre & ſa hauteur donnés.

Solution

1°. Cherchez la baſe du Cylindre (§. 134.)

2°. Multipliez-la par ſa hauteur, le produit ſera la ſolidité demandée.

3°. Si vous multipliez ſa circonférence par la hauteur, vous aurez la ſuperficie en rétranchant les baſes, & ſi vous les y ajoutez, vous aurez la ſuperficie entière.

EXEMPLE.

Soit le diamétre 2AB 560'', hauteur BC 892.''

Baſe	246176''	Circonf.	17584
Hauteur BC	892	BC	892
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Solid. du cylindre.	219588992''	Superf.	156849280
		Baſes ôtées	24617600
		Baſes	24617600
		Superficie entiere	206084480

Pl. VII. Fig. 116.

Démonſtration.

Le cercle étant un poligone régulier composé d'une infinité des côtés, on peut conſidérer le cylindre comme un priſme qui auroit auſſi une infinité

de côtés. On trouve donc sa solidité en multipliant sa base par sa hauteur, & la circonférence de la base multipliée par la même hauteur donnera la superficie (§. 196.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XXIX.

198. Les Pyramides & les cônes qui ont même base & même hauteur, sont égaux.

Démonstration.

Si l'on conçoît deux pyramides ou cônes coupés par une infinité de plans paralleles aux bases, & également éloignés du sommet, il n'y aura pas plus de plans dans une pyramide que dans l'autre, à cause des hauteurs égales ; donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les pyramides seront égales. On doit faire le même raisonnement pour les cônes, puisque les cônes droits ou inclinés sont des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés.

Théorême XXX.

199. Toute Pyramide est la troisieme partie d'un prisme qui auroit même base & même hauteur.

Démonstration.

Pl. VII. Je coupe les trois parallélogrammes montans
Fig. 122. par les diagonales AF, FC, EC, & je fais passer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC, ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF ; or, les deux premieres ont les bases ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC ; & si l'on conçoit

que la seconde EFDC ait pour base le triangle ECD, & que la base de la troisiéme EACF soit le triangle ACE, on trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales, à cause que leurs bases AEC, ECD sont égales, & qu'elles ont leurs sommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur; donc les trois pyramides sont égales, & par conséquent une pyramide est la troisiéme partie d'un prisme triangulaire.

Corollaire.

200. Puisqu'on peut donc considérer un cône comme une pyramide ayant une infinité d'angles: le cône fera la troisieme partie d'un cylindre qui auroit la même base & la même hauteur.

Problême LXVII.

201. Mesurer la solidité d'une pyramide & d'un cône.

Solution.

1°. Cherchez la solidité d'un prisme ou d'un cylindre, qui auroit même base & même hauteur que la pyramide, & le cône. (§. 196 & 197.)

2°. Divisez-là par 3: le quotient sera la solidité de la pyramide on du cône.

Ou

Multipliez la base de part & d'autre par la troisiéme partie de la hauteur.

EXEMPLE.

Soit la solidité du prisme (§. 196.) 360'. la solidité de la pyramide sera 120'.

Soit la solidité du cylindre (§. 197) 219°. 588', 992''. la solidité du cône sera 731, 963 $30\frac{2}{3}''$.

Problême LXVIII.

202. Trouver la solidité d'un cône tronqué ABCD.

Solution.

1°. Dites d'abord : le grand demi-diamétre AG est à la hauteur du cône entier comme la différence des demi-diamétres AG & CF est à la hauteur du cône tronqué CH ; (§. 149) vous trouverez la hauteur du cône entier EG, par la Régle de Trois. (§. 85. Arithm.)

2°. Cherchez ensuite la solidité du cône entier AEB par la connoissance de sa hauteur & de son diamétre AB. (§. 201.)

3°. Soustrayez la hauteur dn cône tronqué FG de la hauteur du cône entier EG, pour laisser la hauteur de celui qu'on a ôté EF.

Pl. VII Fig. 130.

4°. A l'aide de cette derniere hauteur & du diamétre CD, cherchez la solidité du cône ECD (§. 201.)

5°. Retranchez enfin le petit cône ECD du grand AEB, ce qui restera sera la solidité du cône tronqué ACDB.

Exemple.

Soit AB 36′, CD 20′, FG = CH 12′ ;
AG 18′, CF 10′ & AH 8′ ; donc
AH : CH = AG : GE
8 : 12 = 18 :
4) 2 : 3 = 18 (§. 96 Arithm.)
2) 1 : 3 = 9
3
27 = GE
12 = GF
15 = FE

100 : 314 = 18 :
18

2512
314

56′5″2‴ moitiè de la grande circonférence
1800 AG

4521 600
5652

101736″ grande base
90⅓ GE

9° 156′ 240″ Cône AEB

100 : 314 = 10
10

314″ moitié de la petite circonférence
100 CF

31400‴ petite base
50⅓ EF

1570000″ Solidité du Cone CED
9156240 Solidité du Cone AEB

7586240 Solidité du Cone tronqué ACDB.

Théorême XXXI.

203. Une sphère est égale aux deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit même base, c'est-à-dire, dont la base seroit le plus grand cercle de la sphère.

Démonstration.

Soit le quart du cercle ABC, qui en tournant autour de son rayon fixe BC décrit une demi-sphere Pl. VII. Fig. 131.

ABL ; je décris le quarré ACBM du rayon BM ; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle isocéle MBC ; je conçois que le rayon BC soit coupé en une infinité de parties égales entr'elles , & que des points de division O , T , &c. soient menées des perpendiculaires OQ , TX sur ce rayon , & qui se terminent sur AM , ces droites seront les élémens du quarré AMBC , leurs parties OR , TZ , &c. qui se terminent sur la circonférence du quart de cercle , seront les élemens de ce quart de cercle , & les parties OS , TV , &c. qui se terminent sur la diagonale MC, seront les élémens du triangle rectangle isocele MBC ; de façon que chaque élement OS , &c. de ce triangle sera égal à sa distance OC , &c. du centre C ; car les triangles semblables MBC, SOC, donnent MB. BC :: SO. OC ; Or MB = BC ; donc SO = OC. & il est aisé de voir que chaque élément OQ , TX , &c. du quarré ACMB , sera égal au rayon BC : si l'on conçoit que le quarré ACBM , le quart de cercle ABC , & le triangle MBC tournent autour du rayon immobile BC ; les élémens du quarre ACBM décriront des cercles tous égaux qui formeront un cylindre AMHL ; les élémens du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-sphère ABL , & dont le plus grand sera celui que décrira le rayon AC , lequel pour cette raison se nomme le grand cercle de la sphère,& les élémens du triangle MBC décriront des cercles qui formeront un cône MCH. Or , ces cercles étant entr'eux comme les quarrés,au lieu des cercles, & à cause de la proprieté du cercle, nous aurons $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$; mais BC = OQ & OC = OS ; donc $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; par la même raison nous

nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainsi des autres, c'est-à-dire, que les quarrés des élémens du quart de cercle sont égaux aux quarrés des élémens du quarré ACBM, moins les quarrés des élémens du triangle MBC ; donc en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les élémens du quart de cercle, ou la demi-sphère ABL, est égale aux cercles décrits par les élémens du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL moins les cercles décrits par les élémens du triangle MBC, ou moins le cône MCH ; mais le cône MCH étant une pyramide d'une infinité de côtés, est le tiers du cylindre AMHL qui est un prisme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même base que le cône, donc la demi-sphere ABC est égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouve de la même façon que la demi-sphère AKL est égale aux deux tiers du cylindre APEL, & que par conséquent la sphére entiere est égale aux deux tiers du cylindre MPEH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théoréme XXXII.

204 Le cube du diamétre est à la sphére à peu-près comme 300 à 157.

Démonstration.

Si le diamétre de la sphère est 100, son cube sera 1000 000 (§. 191.) & un cylindre ayant même base & même hauteur que la sphére, 785000. (§. 197.) Par conséquent la solidité de la sphére $523333\frac{1}{3}$: (§. 203.) le cube du diamétre est donc à la sphére comme 1000 000

à 523333 $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire en multipliant l'un & l'autre par 3, comme 3000 000 à 1570000 (§. 58. Arithm.) ou en diviſant par 10000, comme 300 à 157. (§. 59. Arithm.)

Remarque.

205. Je dis que le cube du diamétre eſt à la ſphére *à peu-près* comme 300 à 157. Car dans la démonſtration, on prend un rapport par approximation du diamétre à la circonférence 100: 314. (§. 129.)

Théorême XXXIII.

206. La ſuperficie d'une ſphére eſt le quadruple du grand cercle de la même ſphére.

Demonſtration.

La ſphére eſt égale à une pyramide qui a pour baſe la ſuperficie, & pour hauteur le rayon d'une ſphére. On trouvera la ſuperficie en diviſant ſa ſolidité par la ſixiéme partie du diamétre. Le produit des $\frac{2}{3}$ du grad cercle multipliés par le diamétre donne la ſolidité de la ſphére; ſi l'on diviſe donc ce produit par la ſixiéme partie du diamétre, oú, ce qui eſt la même choſe, qu'on le diviſe d'abord par le diamétre, pour avoir le quotient $\frac{2}{3}$ du plus grand cercle, & enſuite par $\frac{1}{6}$, on aura le quotient $\frac{12}{3}$ du plus grand cercle, c'eſt-à-dire, le quadruple du plus grand cercle. Or, la ſuperficie de la ſphére eſt la même choſe; donc la ſuperficie d'une ſphére eſt le quadruple du grand cercle de la ſphére.

Corollaire.

207. On aura donc la ſuperficie d'une ſphére, ſi

on multiplie sa circonférence par le diamétre. (§. 134.)

Problême LXIX.

208. Trouver la superficie & la solidité d'une sphére par le diamétre connu.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence du plus grand cercle. (§. 132)

2°. Multipliez-la par le diamétre donné; le produit est la superficie de la sphére. (§. 207.)

3°. Si vous multipliez cette superficie par la sixiéme partie du diamétre, ou par le diamétre entier; & que vous divisiez le produit par 6, vous aurez la solidité de la sphére.

EEXEMPLE.

Soit le diamétre 5600''' & la circonférence du grand cercle 17584'''

	17584'''
diamétre	5600
	10550400
	87920
Superficie de la sphére	984704''
Diamétre	560
	59082240
	4923520
	551434240''

19 4
551434240 { 91905706 $\frac{2}{3}$''' Solidité de la sphére.
66666666

Problême LXX.

209. Le diamétre d'une ſphére étant donné, trouver ſa ſolidité, par une méthode différente de celle qui eſt ci-deſſus.

Solution.

1°. Cherchez le cube du diamétre, (§. 191.) ou tirez-le de la table des cubes.

2°. Trouvez un nombre proportionel à 300, 157 & au cube trouvé: (§. 85. Arithm.) ce nombre donnera la ſolidité de la ſphére. (§. 204.)

EXEMPLE.

Soit le diamétre de la ſphére 64″, & le cube 262144″, conſéquemment

$$300 - 157 - 262144''$$

```
  262144
     157
 -------
 1835008
1310720
262144
 -------
41156608
```

12 222
41156608
33333300 } $137188'' \frac{208}{300}$ Solid. de la ſphére.

Theorême. XXXIV.

210. Tous priſmes, parallélipipédes, cylindres, pyramides & cônes qui ont mêmes hauteurs, ſont entre eux comme leurs baſes; & ſi leurs baſes ſont égales, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Démonſtration.

Les priſmes parallélipipédes, & cylindres ſont comme les produits des baſes par leurs hauteurs; (§. 194. 196. 197.) les pyramides & les cônes ſont comme les produits de la troiſiéme partie de leurs hauteurs multipliées par les baſes : (§. 201.) ſi leurs hauteurs ſont égales, ils ſeront donc entre-eux comme les baſes ſont entre-elles; & ſi leurs baſes ſont égales, ils ſeront comme leurs hauteurs. (§. 58. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

211. Les baſes des cylindres ſont des cercles, (§. 179.) les cercles ſont comme les quarrés de leurs diamétres; (§. 131.) les cylindres qui ont même hauteur ſont donc comme les quarrés de leurs diamétres, ou des circonférences des baſes.

Théorême XXXV.

212. Les ſphéres ſont comme les cubes de leurs diamétres.

Démonſtration.

Une ſphére étant au cube de ſon diamétre comme une autre ſphére eſt au cube de ſon propre diamétre; (§. 204.) une ſphére ſera donc à l'égard de l'autre, comme le cube du diamétre de l'une, eſt au cube du diamétre de l'autre. (§. 83. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

De la Jauge.

Problême LXXI.

213. Conſtruire la verge de fer, qu'on nomme

communément *jauge*, par le moyen de laquelle on puisse trouver le nombre des mesures d'un fluide contenues dans un vaisseau cylindrique.

Solution.

Pl. VIII. Fig. 132. 1°. Joignez à l'angle droit une ligne indéfinie au diamétre AB d'un vaisseau cylindrique.

2°. Portez de A à 1 la droite égale à AB; B 1 sera le diamétre d'un vase qui contient deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier vase.

3°. Faites A 2 = B 1, B 2 sera le diamétre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le vase qui n'en contient qu'une. On trouve de cette maniere les diamétres de plusieurs autres vases plus grands A 3, A 4, A 5, A 6, &c.

4°. Portez sur un côté de la jauge les divisions trouvées, A 1, A 2, A 3, &c. & sur l'autre côté, autant de fois que vous le pourrez, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure; & vous aurez une jauge parfaite.

Démonstration.

Deux cylindres de même hauteur & dont cette hauteur est celle d'une mesure, sont entre eux comme les quarrés de leurs diamétres; (§. 211.) d'où il est évident que le quarré du diamétre d'un vase qui contient deux, trois, quatre, &c. mesures, est le double, triple, quadruple &c. du quarré du diamétre d'un vase qui n'en contient qu'une. Or, le quarré de B 1 ou A 2 est le double, le quarré de B 2 ou A 3 est le triple, le quarré de B 3 ou A 4 est quadruple, &c. du quarré de AB ou A 1, (§. 144.)

& comme AB ou A1 eſt le diamétre d'un vaſe qui tient une meſure, A2, ſera le diamétre d'un vaſe qui en contient deux, A3, celui d'un vaſe qui en contient trois, A4, celui &c. Si vous appliquez donc au diamétre d'un vaſe cylindrique le côté de la jauge, où ſont marquées ces diviſions, vous verrez tout d'un coup combien ce fond peut tenir de meſures. C'eſt pourquoi ſi on multiplie le diamétre par la hauteur, le produit ſera le nombre des meſures que tout le vaſe peut contenir. Ainſi par le moyen de la jauge on trouve la capacité d'un vaſe cylindrique, relativement aux meſures dont nous nous ſervons pour meſurer les fluides, comme le vin, la biere, l'eau-de-vie, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

214. Que le diamétre ſoit, par exemple, 8 & ſa hauteur 12; le nombre de meſures que le vaiſſeau pourra contenir ſera 96.

Problême LXXII.

215. Trouver la capacité d'un tonneau, c'eſt-à-dire, le nombre des meſures d'un fluide qu'il contient.

Solution.

1°. Meſurez, avec le côté convenable de la jauge, la longueur du tonneau FE, & avec l'autre côté de la jauge, meſurez le diamétre du fond AB, & le diamétre du ventre du tonneau par ſon orifice C. Pl. VIII. Fig. 133.

2°. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ſon orifice C il va toujours en di-

minuant vers ses deux exrémités, l'expérience qu'on a acquis par l'usage, (quoi qu'on ne puisse le démontrer géométriquement) le fait considérer comme un cylindre dont la base est un cercle moyen, arithmétiquement proportionel entre le cercle qui forme le fond, & celui qui forme le ventre : il faut donc ajouter le grand diamétre CD au petit AB.

3°. Multipliez la moitié de la somme par la longueur du tonneau; le produit, (comme on le voit par la démonstration du problême précédent, (§. 213.) sera le nombre des mesures que peut contenir le tonneau.

EXEMPLE.

Soit AB = 8
CD = 12

La somme sera = 20

Demi-somme = 10
FE = 15

Capacité du tonneau = 150 mesures.

Remarque

216. Il faut remarquer, qu'on est encore à trouver une méthode juste, infaillible & facile, pour mesurer les fluides dans un tonneau qui n'est pas plein. Mais si on le léve sur un de ses fonds, & qu'on prenne la hauteur du vin pour la longueur du tonneau, on pourra, à l'aide du problême précédent, trouver le nombre des mesures qu'il pourra contenir.

Problême LXXIII.

217. Trouver la solidité de quelque corps irrégulier que ce puisse être.

Solution.

1°. Mettez le corps irrégulier dans un parallélipipéde creux, remplissez ensuite d'eau ou de sable ce parallelipipede & après avoir rendu la surface du sable exactement plane, marquez la hauteur AB de cette surface si vous n'avez pas rempli le vaisseau entiérement. Pl. VIII. Fig. 134.

2°. Ayant retiré le corps irrégulier du vaisseau, applanissez de nouveau la surface du sable qui doit rester dans le parallélipipéde, & marquez encore la hauteur de cette surface AC : de cette maniére vous aurez la hauteur BC.

3°. Comme le corps irrégulier est égal au parallelipipéde DFCGE, il faut mesurer sa longueur FC, sa largeur CG, & chercher sa solidité. (§. 194.)

EXEMPLE.

Soit AB 8', AC 5'; on aura BC 3'. soit donc encore FC 12', CG 4', la solidité du corps sera 144'.

Remarque.

218. Si on ne pouvoit commodément mettre dans ce vase le corps irrégulier qu'on veut mesurer, comme seroit une statue immobile; on pourra l'entourer d'un parallélipipéde ou d'un prisme quadrangulaire, & remplir le vuide avec du sable; puis la base étant connue, on opérera comme cidessus.

Problême LXXIV.

219. Dessiner les *développemens*, *rets* ou *chassis*, qui pliés comme ils doivent être, représenteront les figures des différents corps géométriques.

Solution.

Pl. VIII. Fig. 135. 1°. Faites le triangle équilatéral ABC: (§. 53.) divisez chaque côté en deux également, aux points E, D, F, & menez les droites DE, EF, FD; & vous aurez la figure ou développement d'un *tetraedre*.

Pl. VIII. Fig. 136. 2°. Si vous prolongez les côtés AC en G, BC, en H, & ED en L, de maniere que CG soit égal à DC, CH = FC, DI = IL = ED; vous pourrez alors mener les droites GL, CI & IH; & par ce moyen vous aurez le développement de *l'octaedre*. (§. 190.)

Pl. VIII. Fig. 137. 3°. Portez 4 fois sur la ligne AB le côté du cube AI, de façon que AI = IL = LN = NB, & formez ensuite le rectangle ABDC, ensorte que AC soit égal à AI. (§. 99.) Menez les droites IR, LM, NO, paralleles à AC, & prolongez de part & d'autre IR & LM en E & F, G & H, tant que EI = IR = RF, & GL = LM = MH; vous ferez par cette méthode le développement de *l'exaèdre*. (§. 182.)

Pl. VIII. Fig. 138. 4°. Décrivez le pentagone régulier ABCDE, (§. 107) appliquez une régle sur les points D & B, & menez la droite BL; Ayant appliqué la même régle sur DA, menez la droite AG: & faites AG = AB = BL, & de l'intervalle AB faites une intersection en Q des points GL, vous formerez ainsi le pentagone ABLQG. Si vous conf-

truisez par la même méthode les quatre autres pentagones BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, & les aurtres six *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, vous aurez décrit le rets, chassis, figure ou développement du *dodécaëdre*. (§.190.)

5°. Décrivez le triangle équilatéral ACB; (§. 53.) prolongez la droite AB en D, & portez la longueur de cette ligne AB quatre fois sur AD en commençant au point B; menez ensuite la droite CE parallele à AD, (§. 67.) & faites CI = IK = KL = LM = ME = AB; prolongez AC en N jusques à ce que CN = AC; appliquez la régle sur B & I, F & K, G & L, H & M, D & E, & tirez les droites YO, SP, TQ, VR & XE; puis ayant appliqué cette même régle sur D & M, H & L, G & K, F & I, B & C, menez les droites DQ, XP, VO, TN, SC; faites enfin MR = ME & BY = BA, & tirez les droites RE & AY: ce qui donnera la figure du chassis de *l'isocaèdre*. (§.190.) Pl. VIII. Fig. 139.

6°, Transportez de B en H sur la ligne BD la largeur du *parallélipipéde* AB, & sa longueur de H en I, puis encore sa largeur de I en K, & sa longueur de K en D; élevez avec l'équerre au point B la hauteur du parallelipide AB, & achevez le rectangle BACD; (§. 99.) menez les paralléles EH, FI, GK à AB, (§. 67.) & prolongez E de part & d'autre en L & N, puis FI en M & O, jusqu'à ce que LE MF, IO & NH soient paralleles à la hauteur du parallelipipede; c'est de cette façon qu'on forme le développement duparallelepipéde, (§. 182.) Pl. VIII. Fig. 140.

7°. Portez sur la droite CF les côtés de la base du *prisme* CG, GH & HF; décrivez le rectangle CAEF dont la hauteur CA est égale à la hauteu du prisme. (§. 99.) Construisez sur les côtés Pl. VIII. Fig. 141.

BD & GH, AB & DE, CG & HF les triangles BKD & GIH : (§. 55.) & tout le développement du prisme sera fait. (§. 179.) Si la base étoit un pentagone, exagone, eptagone, &c. on décriroit sur BD & GH un pentagone, exagone, eptagone &c.

Pl. VIII. Fig. 142. 8°. Du point A de la *pyramide* AE décrivez l'arc EB, & appliquez-lui les côtés de la base ED, DC, CB; menez les droites AE, AD, AC, AB. Décrivez enfin sur DC la base de la pyramide, & vous aurez le ret de la pyramide. (§. 187.)

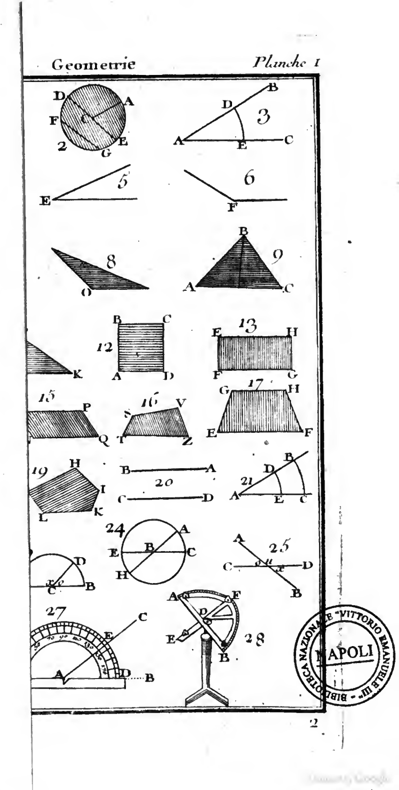
Pl. VIII. Fig. 143. 9°. Pour avoir le ret d'un *cylindre*, décrivez un rectangle (§. 99.) dont la hauteur BC soit égale à celle du cylindre, & la longueur CF = à sa circonférence. (132.)

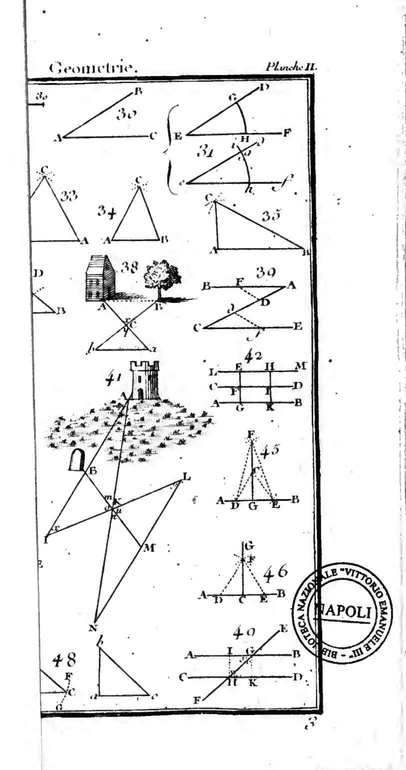
Prolongez BC en A & D, jusqu'à ce que BA & CD soient égales au Diamétre, & décrivez les cercles qui font les bases du cylindre.

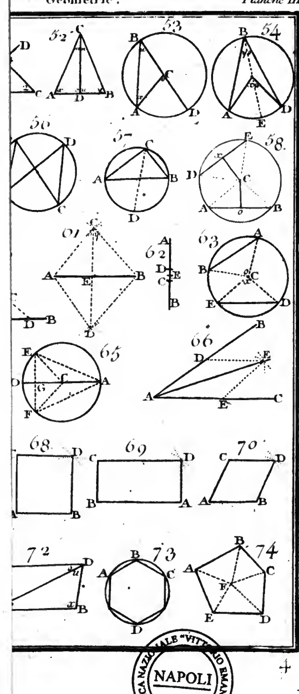
Remarque.

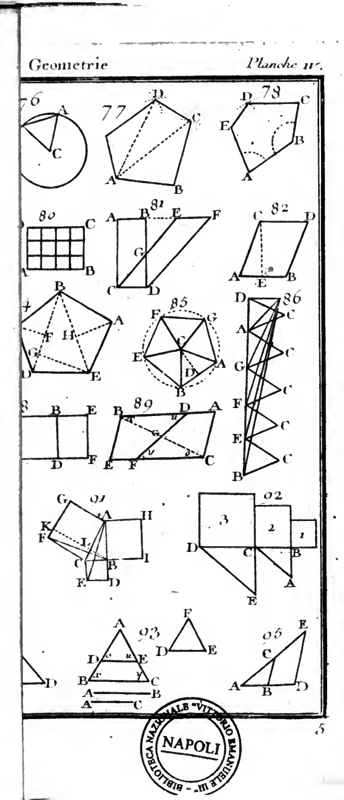
220. Pour coller ensemble toutes ces parties des développemens, avec lesquels vous voulez former vos corps géométriques, ayez soin d'y laisser des bords ou marges en les coupant, à peu-près comme vous le voyez par les lignes ponctuées de la figure 135 ; rien de meilleur que ce travail, & rien de plus utile pour faciliter la connoissance, & faire concevoir distinctement les corps géométriques aux commençans.

Fin de la Géométrie.

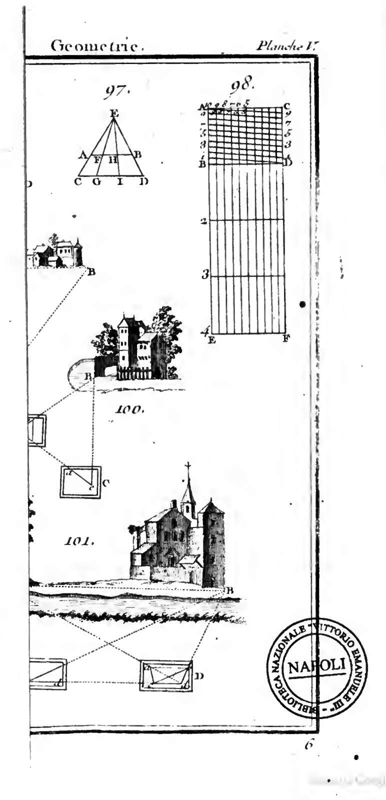

D
A
F
C
E
2
G
B
D
3
A
E
C
5
E
6
F
8
O
B
9
A
C
B
C
12
A
D
K
E
13
H
F
G
15
P
Q
16
V
T
Z
G
17
H
E
F
19
H
I
K
L
B
A
20
C
D
B
D
21
A
E
C
24
A
E
B
C
H
A
25
C
D
B
D
C
B
27
C
E
A
D
B
A
F
D
E
28
B

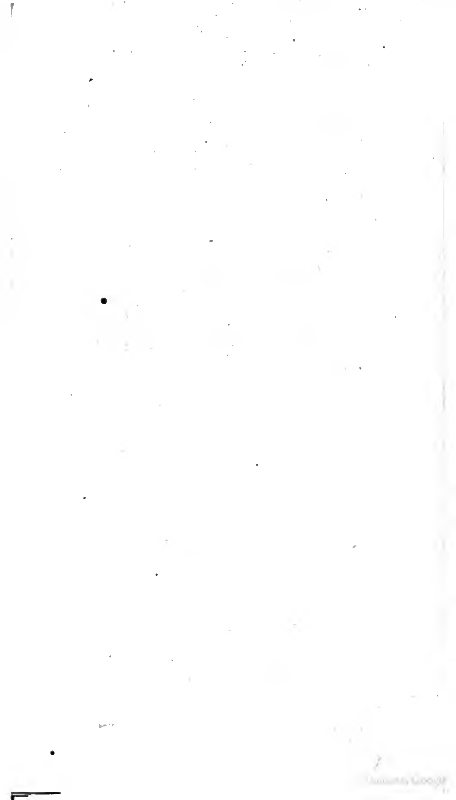

30
31
33
34
35
38
39
42
41
45
46
48
40
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N


52
53
54
56
57
58.
61
62
63
65
66
68
69
70
72
73
74



76
77
78
80
81
82
85
86
89
91
92
93
95


97.
E
A
F
H
B
C
G
I
D
98.
C
B
D
2
3
4
E
F
100.
B
C
101.
B
D



B

D

b 103

a c

B

A

C

6 B

C

D

B 107 C

A F

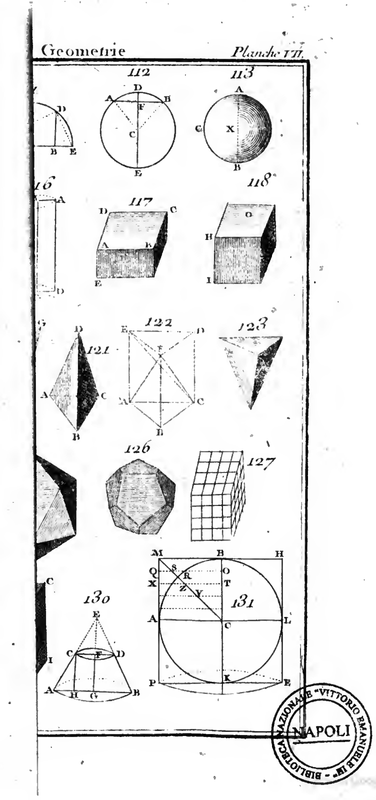
D

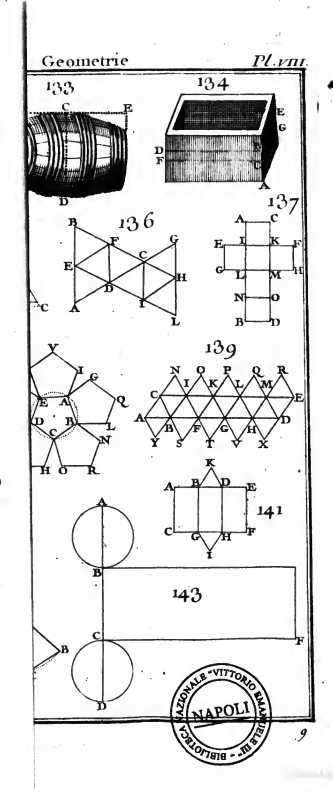
E

1 2 B

109

C 1 2 D


112
113
116
117
118
121
122
123
126
127
130
131
A
B
C
D
E
F
X
H
I
O
G
M
Q
S
R
T
Z
Y
L
P
K


133
C
E
D
134
E
G
D
F
A
136
B
F
G
C
E
H
D
I
A
L
137
A
C
E
I
K
F
G
L
M
H
N
O
B
D
139
N
O
P
Q
R
I
K
L
M
C
E
A
B
F
G
H
D
Y
S
T
V
X
V
I
G
Q
E
A
D
B
L
C
N
H
O
R
K
A
B
D
E
141
C
G
H
F
I
A
B
143
C
F
D
B



ELEMENS
DE LA
TRIGONOMETRIE
RECTILIGNE.

DEFINITION I.

1. LA *Trigonométrie* est la ſcience de trouver tous les côtés & les angles d'un triangle rectiligne par la connoiſſance de trois de ſes parties, dont au moins une eſt un des côtés du même triangle. Des deux côtés, par exemple AB & AC, & de l'un des angles C, trouver les deux autres angles A & B, auſſi bien que le côté BC. Plan. I. Fig. 1.

DEFINITION II.

2. La moitié de la corde AD de l'arc AB ſe nomme le *Sinus* de l'arc AE, & de l'arc AI, qui ſont la moitié des arcs AEB & AIB. Pl. I. Fig. 2.

Corollaire I.

3. Donc le ſinus AD de quel arc que ce puiſſe être eſt perpendiculaire ſur le rayon du cercle EC (§. 95. Géom.) : & les ſinus de pluſieurs arcs ſont Fig. 2.

par conséquent paralléles entr'eux. (§. 75. Géom.)

Corollaire II.

Fig. 1. 4. L'arc AE étant la mesure de l'angle ACE, & l'arc AI celle de l'angle ACI (§. 16. Géom.) il est évident que ces deux angles ont pour sinus AD.

Corollaire III.

5. Deux angles que l'on nomme *de suite*, c'est-à-dire posés l'un auprès de l'autre sur la même droite EI, ont donc le même sinus.

Fig. 2.

DEFINITION III.

Fig. 2. 6. On nomme *Tangente* de l'arc AE, & par conséquent de l'angle ACE, la droite EF, élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon EC; & on donne le nom de *Sécante* du même arc EA & du même angle ECA, à la droite FC.

DEFINITION IV.

7. Le *Sinus verse* d'un arc ou d'un angle, est la partie du diamétre comprise entre l'extrémité de l'arc & son sinus droit. Ainsi le sinus verse de l'arc AE ou de son angle ACE est la partie ED du diamétre EI; & AG = DC sinus de l'arc AH, qui pris avec l'arc EA forme 90 degrés, se nomme *Sinus du complement*, ou *cosinus*. Sa tangente HL, se nomme *tangente du complement* ou *cotangente*; la sécante enfin CL, se nomme *Sécante du complement*, ou *Cosecante* du même arc EA, ou de l'angle ACE. Quand on dit *Sinus droit* ou simplement *Sinus*, on entend la même chose.

Fig. 2.

Remarque.

L'angle de ſuite ACI, de l'angle ACE, ſe nomme complément à deux droits de l'angle AC E; & l'angle ACH qui manque à l'angle ACE pour valoir un droit, ſe nomme complement à l'angle ACE. Il faut donc bien prendre garde de ne pas confondre ces deux ſortes de complémens. Fig. 2.

DEFINITION V.

8. Le rayon EC ou HC ſe nomme *Sinus total.* Fig. 2.

Corollaire I.

9. Puiſque le rayon HC eſt le ſinus du quart de cercle EH, le ſinus total eſt par conſéquent le ſinus de l'angle droit (§. 37. Géom.)

Corollaire II.

Il eſt évident que tout ſinus droit, toute tangente & toute ſécante appartiennent à deux arcs, leſquels pris enſemble font toujours 180 dégrés, ou un demi-cercle. Cela ſe voit clairement à l'égard du ſinus AD qui appartient auſſi bien à l'arc AHI, qu'à l'arc AE. Il en eſt de même de la tangente FE, & de la ſécante FC qui appartient auſſi à l'arc AHI; car ſi on prolonge la ſécante FC, juſqu'à ce qu'elle coupe la tangente qu'on placera à l'extrémité I du diamétre EI; cette tangente & cette ſécante formeront des angles dans l'arc EBI égaux à ceux qu'ils forment dans l'angle EAHI. Fig. 2.

Théorême I.

10. Le ſinus de deux arcs ſemblables BC & EF Fig. 3 & 4.

ont le même rapport, & sont en même raison avec leurs rayons AB & ED.

Demonstration.

Si les arcs BG & EH sont semblables, ils ont l'un & l'autre le même nombre de dégrés, & par conséquent les angles A & D sont égaux (§. 35. Géom.) Or les angles C & F sont droits (§. 3.) le rayon AB est donc au sinus BC comme le rayon ED au sinus EF (§. 148. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

11. C'est pourquoi on attribue 10000000 parties au sinus total de quelque cercle que ce soit, & on suppute, par le moyen de la Géométrie, combien de ces parties se trouvent au sinus & à la tangente de chaque dégré, & même de chaque minute du quart de cercle entier. C'est de cette façon qu'on a construit les *tables des sinus & des tangentes* dont on a besoin dans la Trigonométrie, & que l'on trouve à la tête de presque tous les traités qui ont été composés sur cette matiere.

Remarque seconde.

12. Les sinus & les tangentes sont des nombres d'une étendue qui ennuye infiniment, quand il s'agit d'en faire la Multiplication ou la Division dans la Trigonométrie; c'est pourquoi *Jean* Neper Baron en Ecosse, & après lui *Henri Briggius* Anglois, ont imaginé certains nombres, dont l'usage abrege extraordinairement les grands calculs qu'il faudroit faire, si l'on se servoit des nombres ordinaires; ils convertissent la Multiplication en Addition, & la Division en Soustraction. On leur a donné le nom de

de *Logarithmes*. On les trouve dans les tables des sinus & des tangentes ; non-seulement pour le calcul des sinus & des tangentes, mais encore pour celui des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 1000, & quelquefois davantage. Les logarithmes étant donc d'une si grande commodité, il est à propos d'en donner quelque connoissance précise, avant d'en venir aux Problemes.

Definition VI.

13. Si l'on a deux suites de nombres, l'une en proportion géométrique, l'autre en proportion arithmétique; on nomme les derniers les Logarithmes des premiers.

Remarque premiere.

14. Soient les deux suites de nombre

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les premiers se suivent en proportion Géométrique, & les seconds en proportion Arithmétique; 0 est le logarithme de l'unité: 1 le Logarithme de 2 : 2 celui de 4 : 7 celui de 128 : 8 celui de 256, &c.

Remarque seconde.

15. Si le Logarithme de l'unité est 0, le logarithme du produit sera égal à la somme des produits des Logarithmes.

Exemple.

La somme des Logarithmes 1 & 2 est 3 qui est le Logarithme de 8 produit de 2 multiplié par 4;

7 qui est la somme des Logarithmes 2 & 5, aussi bien que des Logarithmes 4 & 3, est le Logarithme de 128, produit de 4 multiplié par 32, & de 8 multiplié par 16 : c'est pourquoi le Logarithme du quarré est égal au double du Logarithme de la racine.

EXEMPLE.

4 Logarithme du nombre quarré 16 est double du logarithme 2 racine de 4 ; & 6 logarithme du nombre quarré 64 est double du logarithme 3 racine de 8. La moitié du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine quarrée du même nombre. Ainsi la moitié du logarithme 8 est le logarithme de la racine 16 du nombre quarré 256. Le logarithme du cube est le triple du logarithme de la racine. 9 logarithme du nombre cubique 512 est le triple du logarithme 3 racine de 8 ; & par conséquent le logarithme de la racine cubique est la troisieme partie du logarithme du nombre cubique ; 2, par exemple, logarithme de 4 est la troisiéme partie de 6, logarithme du nombre cubique 64.

Remarque troisiéme.

16. Si le logarithme de l'unité est 0, le logarithme du quotient sera égal à la différence des logarithmes du diviseur & du dividende. On trouve le logarithme d'une fraction, si après avoir soustrait le logarithme du numérateur du logarithme du dénominateur, on place devant le reste le signe — qui marque la Soustraction. Ainsi 2 différence entre 5 & 7, est le logarithme du quotient 4 de 128 divisé par 32. De même 5 différence de 3 & 8 est le logarithme du quotient 32 de 256 divisé par 8.

Mais — 1 différence entre 0 & 1 est le logarithme de la fraction $\frac{1}{2}$.

Remarque quatriéme.

17. On voit par ce que je viens de dire, comment à l'aide des logarithmes, on convertit la Multiplication en Addition, la Division en Soustraction, l'extraction de la racine quarrée en bipartition, & l'extraction de la racine cubique en tripartition.

Remarque cinquiéme.

18. Les constructeurs des tables ont pris, 0.00 000 000, 1.00 000 000, 2.00 000 000, 3.00 000 000, 4.00 000 000, pour logarithmes des nombres 1. 10. 100. 1000. 10000. & avec une peine & un travail des plus laborieux ont poussé les logarithmes, non-seulement depuis 1 jusqu'à 10000, mais jusqu'à 100000. C'est par là qu'ils ont déterminé les logarithmes des sinus & des tangentes. On trouve ces tables des Logarithmes dans M. Ozaman, &c. Les Problêmes suivans indiqueront la maniere de se servir des logarithmes.

Remarque sixiéme.

Pour donner une plus grande connoissance des logarithmes, il faudroit en parler fort au long; mais comme un abregé demande qu'on ne dise précisement que ce qui est absolument nécessaire pour l'intelligence de la matiere que l'on traite, je me bornerai à la remarque suivante, parce que ceux qui voudront se mettre parfaitement au fait, pourront consulter M. Ozanam; les Elemens de Wolf; ceux de l'Abbé Deidier, &c. qui en ont traité d'une maniere fort claire.

Remarque septiéme.

Une suite de puissance littérale est la même que la progression géométrique; car a^0 est égal à 1, a^1 égal à 2, &c. & les puissances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. sont les mêmes que celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, & les exposans des puissances littérales seront les mêmes que les termes de la progression arithmétique que nous avons mis sous ceux de la progression géométrique : les logarithmes ont donc les mêmes propriétés que les exposans des puissances de a; ainsi si je veux multiplier le terme 2 de la progression géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter ensemble les logarithmes 1 & 3 de ces deux termes, & la somme 4 sera le logarithme du produit cherché. Or, le terme de la progression géométrique écrit au-dessus de 4 est 16 ; donc 16 est le produit de 2 par 8. Si je veux diviser 16 par 2, je prends les logarithmes 4 & 1 de ces termes 16 & 2, & retranchant le second du premier, le reste 3 est le logarithme du quotient cherché ; ainsi 8 écrit sur 3 est le quotient de 16 divisé par 2.

Pour élever le terme 2 de la progression géométrique à sa quatriéme puissance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'exposant 4 de la quatriéme puissance de 2 : ainsi le terme 16 écrit au-dessus de 4 est la quatriéme puissance cherchée.

Pour extraire la racine cubique de 8, je prends son logarithme 3, & le divisant par l'exposant 3 de la racine cubique, le quotient 1 est le logarithme de la racine cubique de 8, & par conséquent le terme écrit au-dessus de 1 est la racine cherchée. Ainsi ce qu'il faudroit faire par la Multiplication &

la Division, en opérant sur les termes de la progression géométrique, on le fait par l'addition & la soustraction, & ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puissances ou l'extraction des racines, on le fait par la Multiplication & la Division.

Comme il se trouve entre les termes d'une progression géométrique beaucoup de nombres qui ne sont point en progression, & qui par conséquent n'ont point de logarithmes, on y a pourvû par les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. en cette sorte. On a pris la progression géométrique décimale :: 10, 100, 1000, 10000, &c. mais comme il a fallu extraire des racines pour trouver les logarithmes des nombres 1 & 10 pour éviter les restes, on a augmenté tous les termes de leur progression, & leurs logarithmes de plusieurs zéros, en mettant un point devant pour distinguer les logarithmes d'avec les zéros ajoutés, comme 1. 0000000, ou 10. 0000000, &c. & leurs logarithmes 0. 0000000, 1. 0000000, &c. On a nommé *Caractéristique* le caractére qui se trouve devant ce point.

Théorême II.

19. Dans tout triangle ABC, les côtés sont comme les sinus des angles opposés. Pl. I. Fig. 5.

Démonstration.

Si on conçoit un triangle inscrit dans un cercle (ce qui se peut toujours faire) (§. 97. Géom.) la moitié de l'arc AB sera la mesure de l'angle C (§. 84. Géom.) & ainsi la moitié du côté AB sera son sinus (§. 2.) Semblablement la moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle B, & par conséquent la moitié du côté AC sera le sinus de l'angle B : donc le

côté AC est au sinus de l'angle opposé B comme le côté AB est au sinus de l'angle C qui lui est opposé (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême I.

Fig. 5. 20. Les deux angles A & C, & le côté AB étant connus, trouver le côté BC.

Solution.

Dites (§. 19.) le sinus de l'angle A est au côté qui lui est opposé BC comme le sinus de l'angle C au côté AB qui lui est opposé.

Soit, pout exemple C = 48° 35′, A = 57°, 28′, AB = 74′: on opere ainsi par les logarithmes.

Log. Sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. Sin. A. . . .	9. 9258681
Somme	11. 7950998
Log. BC	1. 9200856

auquel répond directement dans les tables 83′.

Remarque premiere.

21. Si non content d'avoir le nombre des pieds, vous voulez encore des pouces, cherchez le même logarithme de BC sous le caracteristique 2 après 830 : vous troverez que le logarithme 832 est celui qui en approche le plus, & ainsi vous verrez qu'outre 83 pieds, il y a encore deux pouces. Voulez-vous avoir même des lignes ? cherchez encore le même logarithme sous le caracteristique 3 après 8320, & vous trouverez que le logarithme qui

en approche de plus près est 8320 ; & par conséquent que le côté BC sera de 8°, 3', 2", 1'''. Il faut toujours suivre cette méthode, quand le logarithme ne se trouve pas assez exactement sous le caractéristique.

Remarque seconde.

22. Comme on résout le Problême par la Régle de Trois (§. 85. Arithm.) il faudroit multiplier le sinus A par le côté AB, & diviser le produit par le sinus de l'angle C ; il est évident qu'il faut ajouter le logarithme du côté AB au logarithme du sinus A, & qu'il faut ensuite soustraire de la somme le logarithme du sinus C. (§. 15. & 16.)

Problême II.

23. Les deux côtés AB & BC avec l'angle C opposé à un des deux AB, étant connus trouver les autres angles. Pl. I. Fig. 5.

Solution.

Dites (§. 19.) : le côté BC est au sinus de l'angle cherché A qui lui est opposé, comme le côté AB est au sinus de l'angle donné C qui lui est opposé.

EXEMPLE.

Soit AB = 82', BC = 75', C = 64° 33'.
Vous ferez le calcul de la façon suivante.

Logar. AB	1. 9138138
Logar. du Sin. C. .	9. 9556688
Logar. de BC. . .	1. 8750613
Somme de AB & de C	11. 8307301

Logar. du Sin. A. . 9. 9169163 auquel répond de plus près 55° 40'.

Remarque premiere.

24. Si vous n'avez pas assez de 55°. 40', vous pourrez faire une seconde opération comme il s'ensuit.

Soustrayez du logarithme trouvé	9. 9169. 163
Le moindre qui en approche le plus prés	9. 9168. 593
Et marquez la premiere différence	570
Soustrayez aussi du plus prochain & plus grand que le logarithme trouvé	9. 9169. 455
Le moindre	9. 9168. 593
Et marquez la diférence	862

Dites : 862 donnent 60", combien donneront 570

60

34200

862) 34200 (39"
2586
8340
7758
582

Après quoi vous trouverez 39". L'angle A est donc de 55°. 40' 39".

Remarque seconde.

25. Les deux angles A & C étant connus, on trouve le troisiéme par le moyen de la géométrie. (§. 77. Géom.) comme on le voit par l'Exemple suivant.

C =	64°	33′	0″
A =	55	40	39
A + C	120	13	39
A + C + B	179	59	60
B	59	46	21

Problême III.

26. Connoissant dans un triangle rectangle les côtés AB & BC qui forment l'angle droit B, trouver les autres angles. Pl. I. Fig. 6.

Solution.

Ayant pris BC pour le sinus total, AB sera la tangente de l'angle C (§. 6.) Dites donc : le sinus total est à la tangente de l'angle C comme un des côtés BC est à l'autre AC.

EXEMPLE.

Soit BC de 79′; AB de 54′; le calcul sera tel

Logar. de BC	1. 8976. 271
Logar. de AB	1. 7323. 938
Logar. du sinus total .	10. 0000. 000

Logar. de la tangente C. 9. 8347667, qui dans les tables appartient à 34° 21′. L'angle C est donc de 34° 21′; & l'angle A 55° 39′ (§. 75. Géom.)

LEMME.

27. Si l'on ajoute la moitié de la différence de deux nombres ou quantités à la moitié de leur somme, on aura le plus grand nombre des deux; si au contraire on retranche cette demi-différence de la moitié de la somme, le nombre qui reste est précisément le plus petit des deux.

Démonstration.

Le plus grand de deux nombres est composé du plus petit & de leur différence; la somme des deux est donc composée du plus petit pris deux fois, & de leur différence. C'est pourquoi la demi-somme étant composée du plus petit nombre & de la moitié de la différence; si on ajoute la demi-différence à la moitié de la somme, on aura le plus grand des deux nombres; & au contraire si on ôte cette demi-différence, le reste exprimera le plus petit des deux nombres proposés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême IV.

Pl. I. Fig. 7

28. Connoissant les deux côtés AC & CB d'un triangle avec l'angle C qui les forme, trouver les autres angles.

Solution.

1°. Dites: la tangente de la demi-somme des angles cherchés A & B est à la tangente de la moitié de leur différence, comme la somme des côtés AC & CB est à leur différence entiere.

2°. Ajoutez la demi-différence à la moitié de leur somme, la nouvelle somme qui en viendra sera l'angle B opposé au plus grand AC des deux côtés

connus. Retranchez cette demi-différence de la moitié de la somme des deux angles, le reste donnera l'angle A. (§. 27.)

Soit pour exemple AC 75', BC 58', C 108° 24'; faites ainsi le calcul.

AC	75°	AC	75'	A+B+C	179° 60'
BC	58	BC	58	C	108 24
AC+BC	133'	AC-BC	17'	A+B	71° 36'
				½(+AB)	35° 48'

Logar. de AC+BC 2. 1238516

Logar. de AC—BC 1. 2304489

Log. de la tangente ½(A+B) 9. 8580694

somme 11. 0885183

Log. de la tang. ½(A—B) . . 8.9646667, auquel répondent dans les tables 5° 17'.

½(A+B)	35° 48.	½(A+B)	35° 48'
½(A—B)	5 17	½(A—B)	5 17
B	41° 5'	A	30° 31'

Démonstration.

Prolongez le côté AC en D jusqu'à ce que CD = BC, & que CE = BC; DA sera la somme, EA la différence des côtés CB & CA, & l'angle DBE sera droit (§. 86. Géom.)

Menez AG parallele à EB, l'angle G sera aussi droit, & GAD = BED (§. 37. 72. Géom.); & GB tangente de l'angle GAB, & GD tangente de l'angle GAD (§. 6.) Or, DCB = CBA + CAB = CBE + CEB = 2CEB (§. 74. 79. Géom.); CEE & CAG seront donc la moitié de la somme des angles cherchés CBA & CAB; par conséquent BAG sera la moitié de la différence (§. 27.) Donc DG tangente de la demi-

fomme des angles cherchés eſt à BG tangente de la demi-diférence, comme DA fomme des côtés AC & CB eſt à EA qui eſt leur diférence (§. 149. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême V.

29. Connoiſſant les trois côtés d'un triangle, trouver les angles.

Solution.

1°. Du fommet de l'angle A décrivez un cercle par le plus petit côté AB; & parce que AD = AB vous aurez auſſi AF = AB = AD (§. 27. Géom.) CD fera la fomme des côtés AC & AB, & CF leur diférence. Fig. 8.

2°. Dites : la différence FC des côtés AB & AC eſt au fegment de la bafe GC comme la bafe BC du triangle eſt à la fomme de fes côtés AB + AC.

3°. Souſtrayez CG de la bafe BC pour avoir le reſte BG.

4°. Abaiſſez de A la perpendiculaire AE fur la corde BG; vous aurez BE = EG = $\frac{1}{2}$ BG (§. 95. Géom.); ayant donc les côtés AB & BE du triangle rectangle AEB, on peut trouver les angles A & B; & dans l'autre ACE, ayant les côtés AC & CE, on trouve auſſi les angles C & A. (§. 23.)

EXEMPLE.

Soit AB = 36', AC = 45', BC = 40'. Tel eſt le calcul

AB = 36'	AC = 45'
AC = 45	AB = 36
AB + AC = 81	FC = 9

Log. de BC 1. 6020600
Log. de AB+AC . . 1. 9084850
Log. de FC 0. 9542425

Somme . . . 2. 8627275

Log. de GC . . . . . . 1. 2606675, auquel répondent dans les tables 18′. Si vous le voulez plus exact (§. 21) & que vous augmentiez vos recherches, vous trouverez enfin GC de 1822‴.

BC=4000‴	EG=1089‴
GC=1822	GC=1822
BG=2178‴	EC=2911‴
BE=1089‴	

Log. de AB 3. 5563025
Log. du sin total. . 10. 0000000
Log. de EB 3. 0370279

Log. du sin. A . . . . 9. 4807254, auquel répond dans les tables le logarithme 17° 36′ & par conséquent l'angle B de 72° 24′.

Log. de AC 3. 6532125
Log. du sin total. . 10. 0000000
Log. de EC 3. 4640422

Log. du sinus A . . . 9. 8108297, auquel répond dans les tables le logarithme 40° 19′; & l'angle C sera donc de 49° 41′. Par conséquent dans le triangle ABC l'angle A est de 57° 55, B de 72° 24′, & l'angle C de 49° 41′.

Démonstration.

J'ai à démontrer que CB est à CD, comme CF est à CG : on va le voir clairement.

Puisque la mesure de l'angle *y* ou GBD est la moi-

tié de l'arc GFD, & la mesure de l'angle x la moitié de l'angle GBD (§. 84. Géom.); on aura $x + y = 180°$. Mais $x + o$ est aussi $= 180°$ (§. 38. Géom.) Donc $o = y$ (§. 25. Arithm.), & comme l'angle C est commun aux deux angles CGF, & CBD, on aura CB : CD = CF : CG (§. 148. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

30. Comme on a donné BE & EC en lignes, il a fallu aussi prendre dans le calcul $3600'''$ pour AB au lieu de 36, & $4500'''$ pour AC au lieu de 45.

Remarque seconde.

31. Nous donnerons encore quelques éclaircissemens sur l'usage de la Trigonométrie pour la résolution de divers problêmes de la Géométrie. C'est pourquoi nous ajoutons l'Appendice suivant.

APPENDICE.

Problême I.

32. Trouver la hauteur, par exemple d'une tour, accessible du côté qu'on aura choisi pour station.

Solution.

1°. Mesurez l'angle ADC (§. 43. Géom.) & la droite BE ou DC (§. 44. Géom.) Fig. 9.

2°. On connoîtra la valeur de l'angle A, parce que l'angle C est droit (§. 75. Géom.)

3°. Ayant connu cet angle A, on trouvera la ligne AC (§. 20).

4°. Ajoutez à cette ligne la hauteur DE = BC; & comme les droites CD & BE sont paralleles, & CB & ED perpendiculaires à BE, on aura la hauteur AB. Mais si BE n'étoit pas horisontal, il faudroit mesurer BC en particulier (§. 171. Géom.)

Problême II.

33. Mesurer la hauteur inaccessible AB. Pl. I. Fig. 10.

Solution.

1°. Choisissez les deux stations E & G, d'autant plus éloignées l'une de l'autre, que la montagne, tour, ou arbre qu'on veut mesurer ont plus d'élévation : de-là mesurez les angles ADC & AFC (§. 43. Géom.), ensuite la longueur des distances G E ou DF (§. 44. Géom.)

2°. Retranchez de l'angle AFC l'angle ADF; le reste sera l'angle FAD (§. 74. Géom.)

3°. Cherchez le côté AF, par le moyen de la connoissance acquise des parties du triangle AFD, des angles & du côté FD.

4°. Cherchez ensuite le côté AC par l'angle F, & le côté AF connus du triangle rectangle (§. 20).

5°. Ajoutez enfin la hauteur de l'instrument DE à la hauteur AC, ou si BC n'étoit pas égal à la hauteur de l'instrument, trouvez FC, & puis BC, dans le triangle rectangle FBC (§. 20) : vous aurez alors la hauteur demandée AB.

Problême III.

34. Des deux fenêtres E & F placées à deux dif-

Pl. I. Fig. 11. férens étages d'une maison, mesurer une hauteur dont on peut voir le sommet A des deux fenêtres cy-dessus.

Solution.

1°. Prenez par le moyen d'un plomb suspendu à une corde, les degrés d'élevation de la fénêtre la plus haute E, au-dessus de la plus basse F, & puis la hauteur de la même fenêtre F au-dessus de la terre G, & ensuite des fenêtres mesurez la quantité des angles AEC & AFD (§. 43. Géom.)

2°. Ajoutez l'angle AEC à 90°, & vous aurez l'angle AEF; soustrayez de 90 dégrés l'angle AFD, le reste sera la valeur de l'angle AFE.

3°. Ajoutés l'angle AEF à l'angle AFE, & retranchez la somme de 180°, ce qui restera donnera l'angle EAF (§. 77. Géom.)

4°. Cherchez dans le triangle AEF le côté AF.

5°. Ensuite dans le triangle AFD le côté AD (§. 20.)

6°. Ajoutez enfin à celui-ci l'élevation de la fénêtre au-dessus de la terre; ou si GB n'étoit pas horisontal, c'est-à-dire, une ligne droite paralléle à l'horison; mesurez la ligne DF, & puis par le moyen de l'angle trouvé DFB (§. 43. Géom.) mesurez à part DB (§. 20); & de cette façon vous aurez la hauteur AB.

Problême IV.

35. Mesurer la distance de deux lieux A & B, Fig. 12. tous deux accessibles d'un troisiéme C.

Solution.

1°. Mesurez l'angle C (§. 43. Géom.) & puis les lignes AC & CB (§. 44. Géom.)

2°

2°. Toutes ces choses étant connues, vous trouverez la valeur de l'angle A (§. 28) & par le (§. 20) vous pourrez trouver la distance demandée AB.

Problême V.

36. Trouver la distance de deux lieux AB dont un seul B est accessible par un troisiéme C. Fig. 13.

Solution.

1°. Prenez la mesure des angles C & B (§. 43. Géom.) ensuite la mesure de la ligne BC (§. 44. Géom.), & par ce moyen vous trouverez la distance AB, qui vous donnera la largeur de la riviere qui est entre-deux (§. 20).

Problême VI.

37. Trouver la distance de deux lieux inaccessibles AB. Fig. 14.

Solution.

1°. Ayant choisi à volonté trois stations DCE sur la même ligne droite, mesurez les angles ADC, ACD, BCE & BEC (§. 43. Géom.), & puis les lignes DC & CE (§. 44. Géom.)

2°. Retranchez de 180° la somme des angles ADC & ACD, & encore de ACD & BCE, aussi bien que de BCE & BEC; dans le premier cas le reste est la valeur de l'angle DAC, dans le second, celle de l'angle ACB; & dans le troisiéme la valeur de l'angle CBE (§. 77. 38. Géom.)

3°. Trouvez à l'aide de ces connoissances les côtés AC & BC (§. 20.) & par le (§. 28.) l'angle CAB, & enfin le côté AB (§. 20.)

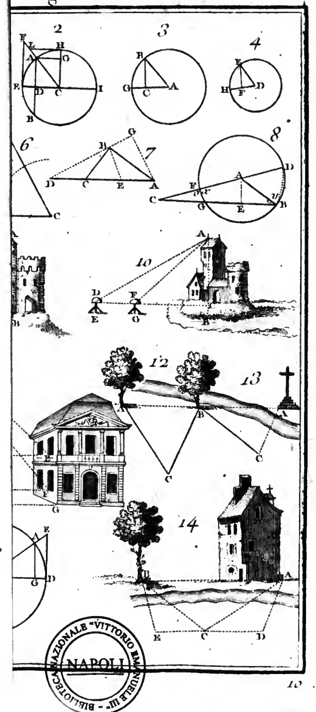
Problême VII.

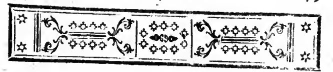
38. Trouver le rapport du diamétre d'un cercle à sa circonférence.

Solution.

1°. Si le rayon du cercle CD est 10000000, le sinus AG aussi bien que la tangente ED sera un arc d'une minute DA 2909 à peu-près : ainsi l'arc
Fig. 15. AD un peu plus grand que AG, & un peu moindre que ED doit être aussi à-peu-près de 2909. Multipliez 2909 par 21600, c'est-à-dire, par le nombre entier des minutes contenues dans la circonférence entiére : le produit sera 62834400 ; le diamétre du cercle est donc à sa circonférence, comme 20000000 est à 62834400, ou peu s'en faut ; c'est-à-dire, (en divisant l'un & l'autre par 200000) comme 100 est à 314. (§. 59. Arithm.)

Fin de la Trigonométrie.


2
3
4
6
7
8
10
12
13
14
F
L
H
A
O
E
D
C
I
B
G



ELEMENS DE MECANIQUE.

DEFINITION I.

1. LA *Mécanique* eſt la ſcience de mouvoir les corps avec de moindres forces & en moins de tems, c'eſt-à-dire, qu'une puiſſance dirigée par les régles de cette ſcience, produit un mouvement & plus grand, & plus accéleré que ne feroit une autre puiſſance ſimplement appliquée.

Remarque.

2. La Mécanique, ſelon la définition de quelques Auteurs, traite proprement de toutes les loix du mouvement; mais communément on reſtraint cette ſcience aux machines, par le moyen deſquelles la force mouvante devient plus capable de remuer une plus grande maſſe, ou de produire un mouvement plus accéleré.

DEFINITION II.

3. On appelle *force* ou *puiſſance* ce qui produit

le mouvement. Ce qui reçoit le mouvement ou qui lui résiste, se nomme *masse* ou *poids*.

Corollaire I.

4. C'est pourquoi on met au nombre des forces mouvantes toutes les créatures animées & inanimées : comme les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, les poids & les corps élastiques.

Corollaire II.

5. Puisque la Mécanique enseigne à produire un mouvement abregé par le moyen d'une puissance, il faut qu'elle apprenne de quelle maniére on doit appliquer les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, &c. pour produire ce mouvement.

DEFINITION III.

6. On appelle *force* ou *puissance vive* celle qui produit un mouvement actuel. Si cette puissance n'est qu'un poids soutenu, on la nomme *force ou puissance morte, ou qui soutient.*

DEFINITION IV.

7. Par le nom de *Machine* on entend tout ce qui a la puissance d'abreger le mouvement.

DEFINITION V.

8. Le *lévier* est une ligne droite & roide, dis-
Pl. I. tinguée par trois points principaux ABC. A mar-
Fig. 1. que celui où est appliqué le fardeau qu'on veut mouvoir. C celui de l'appui, & B celui de la puissance.

Remarque I.

9. Il eſt bon d'obſerver en général que quand on examine la force ou les propriétés d'une machine, on ne conſidére point la matiere dont cette machine eſt compoſée, ni la nature de la matiere, ni les differentes formes que cette machine peut prendre dans d'autres circonſtances, mais ſeulement ce qui conſtitue l'eſſence d'une telle machine, afin de connoître quelles machines ſont néceſſaires dans le cas dont il s'agit; car ſi par un trop grand ou trop long uſage la matiere, la forme, ou quelques autres obſtacles empêchoient que la machine eût tout ſon effet eſſentiel, cela ne doit point être regardé comme provenant de ſes principes qu'on doit conſidérer ſéparément.

Corollaire.

10. Toutes les fois qu'on peut concevoir trois points dans le mouvement d'une machine, l'un auquel ce mouvement ſe fait, le ſecond auquel la puiſſance eſt appliquée, & le troiſiéme qui ſoutient le poids, on concevra alors que cette machine eſt un lévier.

Remarque II.

11. Cela bien conſidéré, on pourra non ſeulement porter un jugement exact ſur preſque tous les inſtrumens, & les autres ouvrages de l'art; mais encore rendre raiſon des mouvemens ſurprenans des animaux, & calculer toutes leurs forces; c'eſt ſur ce fondement qu'eſt établi tout ce que Borelli a écrit ſur le mouvement des animaux.

DEFINITION VI.

Pl. I. Fig. 2. 12. *L'aissieu dans sa roue* est la roue AFDA dont les rayons sont attachés fixément à un cylindre, avec lequel elle peut tourner autour du centre commun C. Il suffit même, pour comprendre cette figure, de concevoir le cercle que décrit le cylindre lorsqu'il tourne sur son axe.

Corollaire.

13. On peut encore rapporter à l'aissieu dans sa roue, le cercle que forme le cylindre tournant sur son axe, lorsque l'on conçoit que ce cercle est plus grand que le plan de la section. Par exemple, dans Pl. I. Fig. 3. la Mécanique, les Cabestans ordinaires FGHI sont du même genre que l'aissieu dans sa roue, parce que la traverse IH, qui dans le mouvement du cylindre tourne sur son axe FG, décrit un cercle. (§. 11. Géom.)

Remarque.

14. Lorsque l'on veut faire usage des roues, on les construit de différentes façons, selon la différente maniere de communiquer la force, ou selon la différente forme des corps que l'on veut mouvoir.

DEFINITION VII.

Pl. I. Fig. 4 & 5. 15. La roue qui doit tourner avec un autre corps est garnie de dents ou de fuseaux. On appelle *Roue etoilée* celle qui porte ses dents sur la surface de sa circonférence, & *roue dentelée*, celle qui a ses dents placées au côté de sa *jante* ou circonférence.

DEFINITION VIII.

16. Le *Tambour* ou *Tympan* eſt une roue à laquelle une autre donne le mouvement par le moyen de ſes dents.

DEFINITION IX.

17. Si l'on forme le tambour de deux diſques KL & MN, & qu'à la place des dents on y mette des fuſeaux ; on appelle cette machine une *lanterne*. Pl. I. Fig. 4.

DEFINITION X.

18. La *poulie* qu'on nomme encore le *rond* du *poliſpate* eſt un cercle ou un rond qui tourne autour de ſon centre C, pendant que la puiſſance D tire en haut le poids E. Pl. I. Fig. 6.

DEFINITION XI.

19. On appelle *plan incliné* AC, celui qui fait un angle oblique ACB avec la ligne horiſontale. Pl. I. Fig. 7.

DEFINITION XII.

20. Si ce plan tourne autour d'un cylindre il forme une *vis* ; la *vis* mâle ou ſimplement la *vis*, eſt celle qui a ſes élévations à la ſurface exterieure du Cylindre IK. Pl. I. Fig. 8.

DEFINITION XIII.

21. La *vis femelle* LM eſt celle qui a les élévations à la ſurface intérieure d'un cylindre creuſé à jour. On donne encore à cette vis le nom *d'écroue*. Pl. V. Fig. 8.

Definition XIV.

Pl. I. Fig. 1. 22. Le point C, autour duquel la machine peut se mouvoir, est appellé *centre du mouvement* ou *centre du repos.*

Definition XV.

Pl. I. Fig. 1. 23. La *ligne de direction* est une ligne droite, le long de laquelle une puissance ou une masse est en mouvement actuel, ou pouroît être en mouvement, si elle n'étoit empêchée par quelque cause. Par exemple, si le fil qui soutient le poids O est coupé au point A, le poids doit tomber & décrira la ligne AO ; cette ligne est celle qu'on nomme ligne de direction de ce poids. Pareillement si la puissance tire en H le long de la ligne BH, la ligne de direction de cette puissance sera BH.

Definition XVI.

Pl. I. Fig. 1. 24. La *distance du centre du mouvement* est la ligne CD, qui est menée perpendiculairement du centre du mouvement C, à la ligne de direction BH.

Corollaire.

25. C'est pourquoi, si la puissance & la masse sont appliquées sous l'angle droit de la machine, elles seront plus éloignées du centre du mouvement ; car si la ligne de direction BE fait un angle droit avec la machine AB, la distance sera CB ; si elle fait un angle oblique CBH, la distance sera CD ; mais dans un triangle rectangle CBH la ligne CB est plus grande que la ligne CD. (§. 144. Géom.)

DEFINITION XVII.

26. Le *centre de gravité* eſt le point où le corps ſe diviſe en deux parties, qui n'ont pas plus de peſanteur l'une que l'autre.

DEFINITION XVIII.

27. Le *centre de grandeur* eſt le point, où le corps eſt comme partagé en deux parties égales.

DEFINITION XIX.

28. La *ligne horiſontale* eſt celle dont tous les points ſont également éloignés du centre de la terre.

Corollaire I.

29. La *ligne horiſontale* eſt, à proprement parler, l'arc d'un cercle décrit du centre de la terre.

Corollaire II.

30. Comme dans les grands cercles ſurtout, les ſoutendantes, ou les cordes des petits arcs, ſont preſque la même choſe que ces petits arcs, ou n'en différent point ſenſiblement. (§. 126. Géom.) La ligne droite MP qui touche la vraie ligne horiſontale au point donné C, eſt priſe elle-même pour la ligne horiſontale. Fig. 9.

DEFINITION XX.

31. La *ligne horiſontale apparente* MP, eſt celle qui touche la vraie ligne horiſontale au point donné C. Fig. 9.

DEFINITION XXI.

32. La *gravité des corps* est cette force qui pusse les corps au centre de la terre.

Théorême I.

Pl. I. Fig. 10. 33. Si le corps DE est suspendu sur la ligne AB, de façon que cette ligne passe par le centre de gravité, ce corps doit être en repos ; il y sera pareillement s'il est appuyé sur le centre de gravité.

Démonstration.

Le corps étant coupé en deux parties d'égale pesanteur par le centre de gravité, la partie E pése autant de son côté que la partie D pése du sien, il n'y a donc aucune raison pourquoi la partie D seroit plutôt élevée que la partie E ; ni l'une ni l'autre ne sera par conséquent élevée ; donc le corps grave doit être en repos. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

34. Donc ce qui soutient *le centre de gravité*, soutient aussi tout le poids du corps qui y est appuyé.

Corollaire II.

35. De-là on peut concevoir toute la pesanteur d'un corps comme rassemblée *au centre de gravité.*

Théorême II.

36. Dans les corps homogénes, (c'est-à-dire, dont toutes les parties sont d'une même matiere,

qui n'eſt ni plus ni moins condenſée, & qui ont même largeur & même groſſeur,) le centre de gravité eſt le même que le centre de grandeur.

Démonſtration.

Car dans ce cas il n'y a point de raiſon pourquoi des parties égales en grandeur ne péſeront pas également; elles ont donc une égale peſanteur; ainſi un corps étant diviſé en deux parties égalment grandes, par le centre de grandeur, & en deux parties également peſantes par le centre de gravité, le centre de gravité ſera donc au même point que le centre de grandeur. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Problême I.

37. Déterminer le centre de gravité de quelque corps que ce ſoit.

Solution du problême.

1°. Mettez le corps donné HI ſur une corde tendue, ou ſur la pointe d'un priſme triangulaire FG; remuez-le juſqu'à ce qu'il reſte en équilibre, vous trouverez le centre de gravité dans la ligne KL, ſur laquelle il ſera poſé. (§. 34.) Fig. 11.

2°. Que ſi vous placez ce même corps ſur la même corde, ou ſur le même priſme ſelon la ligne MN, vous trouverez encore le centre de gravité au point O, où les deux lignes ſe coupent. (§. 34.)

3°. On le trouve également en mettant un corps ſur la pointe d'un poinçon, en le changeant de poſition juſqu'à ce qu'il ſoit en équilibre; un plat, une aſſiéte, par exemple, ſur la pointe d'une fourchete ou d'un couteau.

Théorême III.

38. Si la ligne de direction tombe ſur la baſe ſur laquelle ce corps eſt poſé, il doit reſter immobile, & il ne ſçauroit tomber; mais ſi-tôt que la ligne de direction s'éloignera de la baſe, le corps tombera du côté vers lequel la ligne de direction ſe porte.

Démonſtration.

La ligne de direction eſt une ligne droite ſelon laquelle un corps ſe meut actuellement, comme dans le cas préſent, ou ſe mettroit en mouvement s'il n'en étoit empêché. (§. 23.) Or ſi cette ligne tombe ſur la baſe d'un corps, ce corps ne peut ſe mouvoir ſelon cette ligne; il reſtera donc immobile. *Ce qui etoit d'abord à prouver.* Mais ſi la ligne de direction tombe hors de la baſe d'un corps, rien n'empêche que ce corps ne ſoit en mouvement en ſuivant cette ligne: il doit donc tomber. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

39. Plus donc la baſe ſur laquelle un corps eſt placé ſe trouve grande, plus on aura de peine à faire tomber ce corps, parce que la ligne de direction a un grand eſpace à parcourir avant de tomber hors de cette baſe.

Lemme.

Pl. I. Fig. 9. 40. La ligne droite MP qui touche le cercle au point C fait avec le rayon un angle droit au point de l'attouchement C.

Démonstration.

Supposons que le rayon CL ne soit point perpendiculaire à la ligne MP, on pourra donc tirer du point L une autre perpendiculaire à la ligne MP; par exemple, la ligne LP; (§. 69. Géom.) & parce que l'angle P est un angle droit, la ligne LC sera donc plus grande que la ligne LP. Mais comme la ligne LC est la même que la ligne LN, la ligne LN seroit donc plus grande que la ligne LP; ce qui étant absurde, l'angle qui se forme au point C doit être un angle droit. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorême IV.

41. La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horisontale apparente.

Demonstration.

Les corps graves tendent par la force de la gravité vers le centre de la terre; (§. 32.) par conséquent leur ligne de direction est la même que le rayon de la terre CL. (§. 23. Méch. & §. 13. Géom.)

La ligne horisontale apparente MP touche la circonférence de la terre au point C, (§. 31.) La ligne de direction des corps graves, doit donc faire un angle droit avec la ligne horisontale apparente; (§. 40.) elle lui est par conséquent perpendiculaire. (§. 18. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

42. Comme toute la pesanteur des corps est ras-

semblée dans le centre de gravité ; (§. 35.) c'est de ce centre qu'il faut tirer perpendiculairement la ligne de direction des corps graves, jusqu'à la ligne horisontale apparente.

Problême II.

43. Trouver si un corps grave placé dans quelquelque endroit tombera, ou non.

Solution.

1°. Il faut chercher le centre de gravité. (§. 37.)

2°. Tirez ensuite de ce centre une ligne perpendiculaire sur la ligne horisontale apparente. (§. 69. Géom.) si la ligne perpendiculaire tombe dans la base du corps, il ne tombera pas. Si elle s'écarte de la base, le corps tombera du côté où la ligne perpendiculaire s'éloigne de la base.

Démonstration.

La ligne perpendiculaire ayant été menée du centre de gravité vers la ligne horisontale apparente; elle sera la ligne de direction du corps. (§. 42.) Si elle tombe dans la base, le corps ne sçauroit tomber; si au contraire elle s'en éloigne, le corps doit tendre dans son mouvement vers le côté où tombe la ligne de direction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

44. Par la solution de ce problême, on peut rendre raison de toutes les positions & de toutes les façons de marcher possibles des hommes & des ani-

maux, comme l'a fait M. Borelli dans son ouvrage du Mouvement des animaux, part. 1. prop. 145. & suivantes.

Théorême V.

45. Si l'on suspend aux deux extrêmités AC du lévier ABC deux poids inégaux GF, qui feront en même raison, que leurs distances réciproques le sont à l'égard du point d'appui B; l'un & l'autre sont en équilibre, & ils ne sçauroient se mettre en mouvement. Pl. I. Fig. 12.

Démonstration.

Supposons par exemple, que le poids F pése une livre, & le poids G trois livres, que les lignes de direction CF, & AG soient perpendiculaires à CA aux points A & C; les dégrés de distance du poids F, qui ne pése qu'une livre, se compteront depuis B, jusqu'à C, & ceux du poids G se compteront de A en B; (§. 24.) par conséquent dans notre hypothése AB : BC = 1 : 3, & comme les corps ne perdent rien de leur pesanteur, quelque changement qui se fasse dans leur figure, imaginons ces deux poids changés en deux cylindres, qui ayent une grosseur rélative à chacun d'eux, de façon qu'une demi-livre de ce cylindre reçoive la longueur de la moindre distance AB; ainsi le cylindre IK, auquel a été changé le moindre poids F, contiendra deux parties égales à AB; & l'autre cylindre HI, qui a été fait du gros poids G, en contient six parties; que si l'on imagine la ligne BC prolongée vers D, jusqu'à ce que la distance de CD soit égale à la distance AB; & au contraire, si l'on imagine la ligne AB prolongée vers E jusqu'à ce que la distance AE soit égale à la distance

BC, la ligne ED sera égale à la longueur de tout le cylindre HK : Or la ligne ED est divisée en deux parties égales au point B, puisque depuis B jusqu'à E il y a quatre parties égales à AB, comme depuis B jusqu'à D. Le centre de gravité du cylindre HK, étant le même que son centre de grandeur, (§. 36.) la ligne BM à laquelle il est suspendu, passe par son centre de gravité; le cylindre est donc en repos, (§. 33.) par conséquent ni l'un ni l'autre des deux cylindres HI, & IK ne doit l'emporter de même que les deux poids dont ils ont été formés ; ils doivent donc avoir la même pesanteur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire

46. C'est pourquoi, si les poids FG doivent être égaux, les distances AB & BC, doivent être aussi égales : Car, F : G = AB : BC. donc si F = C, AB le sera aussi à BC. (§.e53. Arithm.)

Remarque.

47. Toutes les démonstrations que l'on peut faire dans toute la Mécanique, sont appuyées sur ce seul Théorême: c'est pour le rendre plus familier, à l'exemple de Jungnickelius, (Clef de la Mécanique pag. 107. 108.) que je vais faire voir comment on peut le prouver par l'expérience.

Problême III.

48. Examiner la loi fondamentale de la Mécanique, ou mettre en experience le précedent Théorême.

Solution.

Solution.

1°. Faites travailler par un Menuisier un solide en forme de prisme quadrangulaire, dont la largeur excéde la grosseur, & dont on puisse séparer 8 parties de même longueur; & de plus une partie d'une longueur double, une autre d'une triple, & une enfin d'une longueur quadruple.

2°. Mettez la partie qui a une longueur double sur la pointe d'un prisme triangulaire, vous verrez qu'elle restera en équilibre si la partie AC est égale à la partie CB. Pl. I. Fig. 13.

3°. Que si vous placez sur le même prisme la partie qui a une longueur triple DE, de façon que FD comprennent deux parties, & EF une seule; il faudra, pour que DE soient en équilibre, que vous ajoutiez trois parties de la longueur simple sur la partie FE.

4°. Pareillement si vous mettez sur la pointe du prisme la partie d'une longueur quadruple GH, de façon que GI ait trois parties, & que HI n'en ait qu'une seule, il en faudra ajouter 8 autres sur HI, pour que GH soit en équilibre.

Toutes ces expériences sont conformes à la loi fondamentale, que j'ai donnée dans la démonstration du Théorême précédent.

Démonstration.

Supposons que les parties des divisions AC & CB, DF & FE, GI & IH, n'ont aucune pesanteur, & qu'à la place de ces pesanteurs, on les suspende aux centres de leurs gravités, qui se trouvent au milieu (§. 36.) des poids, qui égalent en même-tems la pesanteur des parties, & celle des

divisions qu'on auroit mises dessus. (§. 35.) comme les divisions qui sont en équilibre, sont aussi paralléles à l'horison ; les lignes de direction de ces poids doivent être perpendiculaires aux lignes AB, DE & HG ; (§. 41.) & leurs distances du centre du mouvement étant partagées également par les demi-lignes AC & CB, DF & FE, GI & IH seront égales. Or les gravités des parties qui pésent également, étant en même raison que les distances considérées rélativement l'une à l'autre, supposé par exemple IG de trois livres & IH avec les divisions placées dessus de 9 livres, IH n'aura qu'un dégré de distance, tandis que IG en aura trois: Il est donc clair que cette expérience confirme le Théorême précédent. *Ce que nous avions à démontrer.*

Definition XXII.

49. *La balance* est un instrument, par le moyen duquel on peut rechercher & découvrir la pesanteur des corps.

Problême IV.

Pl. II. Fig. 14. 50. Construire une balance juste & exacte.

Solution.

1°. Divisez le *fleau* AB en deux parties au point C, pour en faire deux bras AC & CB. Placez à l'extrémité de ces bras deux bassins de même pesanteur DE.

2°. Placez perpendiculairement au point C l'éguille CK, de façon que le fleau AB puisse se mouvoir facilement dans la chasse. Si après avoir suf-

pendu la balance, l'éguille ne sort point de la chasse HI, il est manifeste que les corps placés dans les bassins sont d'une égale pésanteur.

Démonstration.

Si l'on suspend une balance au point I, l'anse HI sera perpendiculaire à la ligne horisontale; (§. 41.) par conséquent, lorsque l'aiguille CK est cachée dans l'anse, comme elle est perpendiculaire au fleau AB, celui-ci sera parallele à l'horison. Mais comme les lignes de direction des poids D & E, font des Angles droits avec les bras AC, & CB, leur distances sont égales à ces bras. (§. 24.) Or AC & CB étant égaux, les poids suspendus de part & d'autre aux points D & E doivent aussi être égaux. (§. 46.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

51. C'est pourquoi, si les bras AC & CB ne sont pas aussi longs l'un que l'autre, la balance est trompeuse.

Problême V.

52. Eprouver si une balance est juste ou non.

Solution.

Mettez le Bassin D à la place du bassin E, & E en D, ou changez les poids des bassins: si vous trouvez encore l'équilibre, la balance est juste; s'il n'y a plus d'équilibre, la balance est trompeuse. Pl. II. Fig. 14.

Démonstration.

Si la balance est trompeuse, les bras ne sont point

également longs, (§. 51,) & par conséquent le bassin suspendu à celui qui a plus de longueur, doit être plus leger que l'autre; (§. 45.) c'est pourquoi si vous changez les bassins de bras & que vous mettiez le plus léger au bras le plus court, il n'y aura plus d'équilibre. *Ce que j'avois à démontrer.*

DEFINITION XXIII.

Pl. II. Fig. 15. 53. *La Romaine* ou *le peson* est une balance, avec laquelle, par le moyen d'un poids, on trouve la pesanteur de différens corps.

Problême VI.

54. Construire une balance romaine.

Solution.

1°. Divisez la verge MN en autant de parties égales que vous voudrez.

2°. Mettez à l'extrémité de la premiere division O, une languette ou lame de fer OP perpendiculaire à la verge, comme dans la balance ordinaire.

3°. Chargez le bras le plus court OM, jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec le plus long ON.

4°. Suspendez au bras qui a le plus de longueur le poids R, qui puisse glisser le long de la verge, comme vous voudrez; cela fait vous aurez la romaine.

Démonstration.

Parce que les deux bras MO, & NO, sont en équilibre, c'est comme s'ils n'avoient aucune gravité; par conséquent le poids R placé au point 1, sera en équilibre avec une livre; placé sur 2, il en contrebalancera deux; au point 3, il en contrebalancera 3, & ainsi des autres. Par conséquent, on

peut par le moyen d'un seul poids peser les corps de differente gravité : l'Instrument MNO est donc une balance romaine. (§. 53.) *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

55. Pour agir avec plus de sûreté, il faut déterminer par expérience dans le bras le plus long les points 1 . 2 . 3 . 4 . &c. on peut alors se passer de mettre en équilibre les deux bras, surtout quand il s'agit de peser des masses considérables, comme un chariot chargé de foin ; car plus le bras le plus long surpasse le petit en pesanteur, moins il en faudra dans le poids que l'on fait glisser sur la verge pour péser les plus grandes masses.

Problême VII.

56. Connoissant la gravité du lévier AB, la distance du centre de gravité V, les distances du poids AC, & de la puissance CB avec le poids O, trouver la grandeur d'une puissance morte. Pl. I. Fig. 1.

Solution.

1°. Imaginons un lévier sans pesanteur, au lieu duquel on aura placé au centre de gravité V le poids G, qui lui sera égal : (§. 35.) nous trouverons qu'il faudra placer le poids au point A, pour que le lévier soit en équilibre. (§. 45.)

2°. Retranchons le poids trouvé du poids donné, le reste sera le poids que la puissance placée en B devra soutenir.

3°. Mais parce que ce poids est avec la puissance morte, qui doit être placé au point B, en même raison que BC & CA ; (§. 45.) nous trou-

verons cette puissance par la régle de trois. (§. 85. Arith.)

EXEMPLE.

Supposons CA = 1, CV = 2½, CB = 5, G = 10 liv. O = 300 liv.

1 — 2 — 10 5 — 1 — 280
 10 5) 25 (56 liv. La puissance
 ———— ————
 20 liv. 30
 300 le poids 30
 ———— ————
 280 0

Problême VIII.

Pl. I. Fig. 1. 57. Connoissant la pesanteur du lévier AB, la distance du centre de gravité CV, les distances de la puissance BC, & du poids CA avec la force morte, trouver le poids.

Solution.

1°. Cherchez comme dans le problême précédent la partie du poids que le lévier seul peut soutenir.

2°. Cherchez de même l'autre partie du poids, que la puissance appliquée au point B peut aussi soutenir.

3°. Réunissez ces parties trouvées, & vous aurez le poids que vous cherchiez.

EXEMPLE.

Supposons CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 liv. la puissance morte 36 liv.

1 — 2 — 10

10

20 La premiere partie du poids,

1—5—56

5

280 l'autre partie pu poids.

20 la premiere.

300 le poids entier.

Problême IX.

58. Connoissant la gravité du lévier G, le poids O, la puissance morte, la longueur & le centre de gravité V du lévier AB, trouver le centre commun de gravité C, c'est-à-dire, le point d'appui où il faut poser le lévier, pour que la puissance soutienne le poids. Pl. I. Fig. 1.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le centre commun de gravité Z, celui de la puissance morte appliquée au point B, & celui de la gravité du lévier G, en disant, VB est à ZB ou à la distance du centre commun de gravité, comme la somme de la puissance morte & de la gravité du lévier, est à la gravité du lévier. (§. 45.)

2°. Retranchez ZB de AB, & vous aurez AZ;

3°. Imaginez le poids suspendu au point Z égal à la gravité du lévier G, & à la puissance morte en

B pris ensemble; (§. 35.) vous trouverez comme auparavant la ligne CZ, & par conséquent le point C que vous cherchiez.

Exemple.

Supposez la puissance placée en B $= 66$, la gravité du lévier G $= 10$, le poids O $= 300$ livres, AB $= 6$, VB $= 3$.

$66 - 10 - 3$

$\frac{3}{30}$ $\quad \frac{30}{66} (0 \frac{30}{66} = \frac{5}{11} = ZB.$

$\frac{66}{11} = AB.$

$\frac{61}{11} = AZ.$

$366 - 66 - \frac{61}{11}$

c'est-à-dire, $61 - 11 - \frac{61}{11}$ (§. 59. 96 Arithm.)

$\frac{11}{11}$

$\frac{61}{61} (1 = AC.$

Théorême VI.

Pl. II. Fig. 16. 59. Si le poids est placé au point B, entre le centre du mouvement C, & le lieu de la puissance morte A, celle-ci sera en même raison avec le poids qui est au point B, que la distance du poids CB avec la distance de la puissance CA.

Démonstration.

Prolongez CA vers D, jusqu'à ce que DC = CA ; il est évident qu'alors, la puissance qui est en A, a autant de valeur que la puissance qui est en D. (§. 46.) Or si la puissance qui est en D soutient le poids qui est en B, elle est avec lui en même raison que BC avec CD, ou CA ; (§. 45.) par conséquent il est nécessaire que la puissance qui est en A, soit en même raison avec le poids B, comme BC l'est avec CA. *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

60. Nous nommerons dans la suite ce *lévier homodrome* & le premier *hétérodrome*.

Problême X.

61. Connoissant la gravité E, & le centre de gravité F du lévier homodrome CA, le poids G, la distance du poids CB, & de la puissance morte CA, trouver la quantité de la force morte au point A. Pl. II. Fig. 16.

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée au point A, pour soutenir seulement le lévier. (§. 59.)

2°. Cherchez aussi la puissance, qui appliquée au même point A, puisse seulement soutenir le poids donné G. (§. 59.)

3°. Réduisez ces deux puissances trouvées en une somme ; en les ajoutant l'une à l'autre, vous aurez la force que vous cherchiez.

EXEMPLE.

Soit CB = 1, CF = 3, CA = 6, G = 300 l. = 10 liv.

6—3—10
ou 2 1 10 (§. 95. 96. Arithm.)
1
———
1ø (5 l. la premiere partie de la puiss.
2
6—1—300
1
———
3øø (50 l. l'autre partie de la puiss.
6ø 5 liv. la premiere.
———
55 liv. la puissance entiere.

Remarque.

62. Pour comprendre tout l'ouvrage que Borelli a fait sur le mouvement des animaux, il suffit de se rendre familiers les problêmes que nous avons donné touchant le lévier, & de se souvenir de ce que nous avons dit au paragraphe 10. Je ne parlerai point ici d'une infinité de cas, dans lesquels il faut faire usage de ces sortes de calculs. Il n'y a presque aucun instrument dans les arts, ni aucun mouvement des corps dans la nature, où ils ne puissent être appliquées.

Théorême VII.

Pl. II. Fig. 17. & 18. 63. Si la puissance fait baisser le lévier de L en M, l'espace que la puissance parcourt, sera à l'égard de l'espace que le poids parcourra, comme le poids est à l'égard de la force morte.

Démonſtration.

Car pendant que la puiſſance forme l'arc LM dans ſon mouvement, le poids en s'élevant forme celui de HN: l'eſpace que parcourt le poids eſt donc à celui que la puiſſance parcourt, ce que l'arc HN eſt à l'arc LM, c'eſt-à-dire, comme HI à IL, à cauſe de l'égalité des angles au point I; (§. 40. Géom.) & par conſéquent, comme la force morte eſt au poids. (§.45.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

64. Si vous abaiſſez la perpendiculaire NO du point N ſur HI, & du point M, celle qui eſt marquée MR ſur IL, NI ſera à l'égard de NO, comme MI à l'égard de MR; (§. 10. Trigon.) par conſéquent NI : MI = NO : MR. (§. 83. Arith.) L'eſpace que le poids parcourt en montant eſt donc à celui que la puiſſance parcourt en deſcendant ce que la puiſſance morte eſt au poids.

Corollaire II.

65. Il s'enſuit de là qu'il faut autant de force pour lever un poids de trois livres à la hauteur d'un pied, qu'il en faut pour lever une livre à la hauteur de trois pieds, dans le même eſpace de tems.

Corollaire III.

66. Comme l'on meſure la viteſſe du mouvement d'un corps par l'eſpace qu'il a parcouru dans un tems déterminé, ainſi la viteſſe, avec laquelle une puiſſance ſe meut ſera en même raiſon avec la

vitesse du mouvement d'un poids, qu'est un poids avec la force morte.

Remarque.

67. Ainsi nous voyons que le lévier n'augmente point la force, mais qu'il la met en situation de produire un mouvement plus lent. Si l'on veut donc accélérer ce mouvement, il faut placer la puissance au point H, & le poids au point L : alors la force est plus grande que le poids, & le mouvement se fera dans un moindre espace de tems.

Théorême VIII.

Pl. I. Fig. 2. 68. Si la ligne de direction de la puissance morte fait un angle droit avec le rayon de la roue AC, & que la ligne de direction du poids E fasse le même angle avec le rayon du cylindre CB, la puissance morte est au poids comme le rayon du cylindre CB avec le rayon de la roue AC.

Démonstration.

La puissance soutiendroit le poids quand il n'y auroit que la ligne AB : ainsi comme le centre du mouvement est au point C, le poids au point B, & la puissance morte appliquée à angle droit au point A, celle-ci sera à l'égard du poids, comme GB à l'égard de CA. (§. 10. 45.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

69. Si la ligne de direction de la puissance morte FH fait un angle oblique avec le rayon de la roue FC, c'est comme si elle étoit placée au point G : elle sera donc à l'égard du poids comme CB à l'égard de CG.

Corollaire II.

70. Si l'on connoît l'angle GFC, que la puiſſance forme avec le rayon de la roue auſſi connu ; on trouvera par la Trigonométrie la ligne GC. (§. 20.Trigon.)

Corollaire. III.

71. La puiſſance fait un très-grand effet quand la ligne de direction fait un angle droit avec le rayon de la roue. (§. 25. 45.)

Corollaire IV.

72. Tous les problêmes qui ſont propoſés ſur le lévier peuvent être appliqués aux roues, parce que la roue peut être conſidérée comme un lévier à raiſon de la puiſſance morte. (§. 10.)

Problême. XI.

73. Connoiſſant le poids C, & les rayons des aiſſieux BH, AD, EF, & des roues BA, DE, FG. Trouver la force morte qui doit être placée au point G. Pl. II. Fig. 19.

Solution.

1°. Cherchez la puiſſance qui doit être appliquée à la circonférence de la premiere roue pour pouvoir ſoutenir le poids C ſuſpendu au cylindre BH. (§. 68.)

2°. Regardez cette puiſſance comme un poids ſuſpendu au cylindre de la ſeconde roue. Déterminez encore la puiſſance, qui étant appliquée à la circonférence de cette roue, puiſſe ſoutenir & la roue & le poids. (§. 68.)

3°. Continuez cette opération jusqu'à ce que vous ayez trouvé la puissance qui doit être appliquée à la derniere circonférence.

EXEMPLE.

Soit C = 6000 liv. BH = 6, AB = 34, AD = 5, DE = 35, EF = 4, FG = 27.

34—6—6000 ou 17 3 3 18000	1 17 1554 18000 17777 111	$1058\frac{14}{17}$ ou 1059 puissance à appliquer en A.
35—5—1059 7 1	32 1059 777 1	$151\frac{2}{7}$ puissance en E.
27—4—$151\frac{2}{7}$ 4 | 7 $605\frac{1}{7}$	2 261 605 277 2	$22\frac{11}{27}$ puissance en G.

Remarque.

74. Si connoissant la puissance vous cherchez le poids, vous n'avez d'autre opération à faire, que de commencer par la puissance, qui est au point C, & de prendre pour une puissance appliquée au point E, le poids qui est placé à ce même point, & continuer l'opération comme auparavant.

Théorême IX.

75. Si la puissance met un poids en mouvement par le moyen de l'aissieu dans sa roue, l'espace de la puissance est en même raison avec l'espace que le poids parcourt, comme le poids avec la puissance morte. Pl. I. Fig. 2.

Démonstration.

Pendant que la roue tourne une fois, le cylindre IBK fait aussi un tour; (§. 12.) & ainsi le poids E est élevé à la hauteur d'autant de pieds que la circonférence de la roue en contient : donc la circonférence du cylindre représente l'espace que le poids parcourt, comme la circonférence de la roue celui que la puissance parcourt. Ces deux espaces sont donc l'un à l'égard de l'autre, comme la circonférence du cylindre à l'égard de la circonférence de la roue; ou ce qui revient au même, comme le rayon du cylindre CB à l'égard du rayon de la roue CA; & par conséquent comme la puissance morte, à l'égard du poids. (§. 68.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

76. Il faut observer que lorsque plusieurs roues s'engrainent l'une dans l'autre, si elles sont attachées au même cylindre, elles font autant de tours les unes que les autres dans le même espace de tems. Si elles ne sont point attachées au même cylindre, & qu'une petite reçoive son mouvement d'une grande, pendant que celle-ci fait un tour, celle-là en doit faire autant que la grande contient de fois la circonférence de la petite, ou ce qui revient au mê-

me autant que le nombre des dents de la grande doublera le nombre des dents de la petite.

Probleme XII.

Pl. II. Fig. 19. 77. Connoissant en quelle raison sont les rayons, ou les circonférences des petites roues, avec les rayons & les circonférences des grandes, trouver les tours que fait une roue qui tourne avec grande vitesse, tandis qu'une grande, dont le mouvement est lent ne tourne qu'une fois.

Solution.

1°. Divisez les circonférences des grandes roues par les circonférences des petites.

2°. Multipliez les quotiens les uns par les autres, le produit indiquera le nombre des tours que fait la roue G qui tourne avec vitesse, dans l'espace de tems que la roue A n'en fera qu'un, en tournant lentement. (§. 76.)

EXEMPLE.

Soit la circonférence de la roue A 24, de la moindre D 12, de l'autre plus grande E 36, & de l'autre petite F 9.

$$\left.\begin{matrix}24\\12\end{matrix}\right\}2 \qquad \left.\begin{matrix}36\\9\end{matrix}\right\}\begin{matrix}4\\2\\\hline 8\end{matrix}$$

La derniere roue G fera donc 8 tours, pendant que la roue A n'en fera qu'un.

Remarque.

78. On estime aussi les circonférences par le nombre

nombre des dents, parce que dans les roues qui se rencontrent les dents sont aussi grandes les unes que les autres.

Problême XIII.

79. Connoissant le nombre des révolutions de la roue qui tourne avec vitesse, tandis que celle qui ne tourne que lentement ne fait qu'un seul tour, trouver le nombre des roues & le nombre de dents que contiennent ces roues & ces pignons, ou le nombre des fuseaux qui forment ces lanternes.

Solution.

1. Réduisez en ses produisans le nombre donné des révolutions, autant il y aura de produisans, autant il faudra de roues dentées & de pignons ou lanternes.

2. Multipliez séparément par chaque produisant trouvé un nombre de dents que vous aurez déterminé dans les pignons, les produits vous donneront le nombre des dents, des roues qui s'engrainent avec les pignons. (§. 77. 78.)

EXEMPLE.

Une roue qui tourne avec vitesse fait 40 révolutions, tandis que celle qui tourne lentement n'en fait qu'une. Comme 40 est le produit de 5 par 8, on conçoit qu'il faut deux roues dentées, & autant de pignons ou lanternes, qui s'engrainent dans ces roues. Si les lanternes ont six fuseaux, la roue A qui tourne lentement aura 48 dents, celle du milieu E en aura 30, & la troisieme G, à laquelle la puissance est appliquée n'en aura point, parce qu'elle ne doit recevoir sa figure

Pl. II. Fig. 19.

que de la maniere dont on jugera à propos d'appliquer la puissance.

Problême XIV.

80. Connoissant la puissance & le poids, trouver le nombre des roues, & les raisons de leurs rayons aux rayons des axes, ou petites roues attachées au même cylindre que les grandes.

Solution.

1. Divisez le poids par la force, afin de connoître combien de fois celle-ci est renfermée dans celui-là.

2. Séparez le quotient des produisants, car le nombre des produisants est précisément le nombre des roues; & les diamétres des pignons, tambours ou lanternes sont en même raison avec les diamétres des roues appliquées au même cylindre, que l'unité avec chaque produit. (§. 73.)

EXEMPLE.

Supposons le poids de 30000 livres & la puissance de soixante livres, le quotient réduit aux produisants 4. 5. 5. 5. sera de 500 livres.

On peut donc faire quatre roues, dans l'une desquelles le diamétre de l'axe soit en même raison avec le diamétre de la roue, que 1 avec 4, & dans les autres comme 1 est à 5.

Remarque.

81. La réduction des nombres en leurs produisants dépend de l'expérience, & il faut un peu d'exercice pour y réussir. On y procéde plus faci-

lement, en divisant le nombre qui doit être réduit par des petits nombres; quelquefois le nombre donné ne peut se réduire en nombre purement entiers: dans ce cas il faudra retenir la fraction avec ces nombres entiers, ou si la chose est praticable il faut une peu augmenter le nombre jusqu'à ce qu'il puisse être exactement divisé.

Théorême X.

82. Si la puissance K, dont la direction DK est parallèle à la longueur du plan AG, soutient le corps D sur le plan incliné AC: la puissance K est en même raison avec le corps D, que la hauteur du plan AB avec la longueur AC. Pl. I. Fig. 7.

Démonstration.

Soit DH la ligne de direction du poids D, nous pouvons concevoir toute la pesanteur comme réunie dans le seul point F, (§. 23. 35.) par conséquent EF est la distance du poids à l'égard du centre du mouvement, & ED la distance de la puissance; (§. 24.) mais comme DEF représente un lévier (§. 10.) dont le centre du mouvement est au point E; la puissance K qui est au point D, est à l'égard du point D qui est au point F, comme EF à l'égard de ED: (§. 45.) & parce que les angles DEG & EFG sont droits, & que l'angle EGF est commun aux deux triangles EFG, & DEG, l'angle EDF sera donc égal à l'angle FEG, & l'angle DEF à l'angle EGF (§. 78. Géom.) donc EF : ED = GF : EG; (148. Géom.) & comme les angles verticaux au point G sont égaux. (§. 40. Géom.) & les angles formés aux points F & H sont droits, GF : EG sera égal à GH : GC (§. 148.

Géom.) Enfin comme GH : GC = AB : AC. (§. 149. Géom.) & par conséquent EF : ED = AB : AC. (§. 57. Arithm.) AB est à l'égard de AC, comme la puissance morte à l'égard du poids. *Ce que j'avois à demontrer.*

Théorême XI.

Fig. 10. 83. Si le poids R placé sur le plan incliné LN est soutenu par la puissance dont la direction RI est parallele à le base MN : la puissance est à l'égard du poids, comme la hauteur LM à l'égard de la base MN.

Démonstration.

On voit par la démonstration du Théorême précédent, (§. 82.) que l'on peut regarder le cas présent comme si dans un lévier TQS la puissance étoit placée au point T, & le poids au point S ; par conséquent la puissance est à l'égard du poids, comme QS à l'égard de TQ, ou de RS ; (§. 45.) & comme par la démonstration dont nous venons de parler on a prouvé que les triangles RQS, SQO, OPN & LMN sont semblables, on aura QS : SR = SO : QS = OP : PN = LM : MN ; (148. 149. Géom.) & par conséquent la puissance est en même raison avec le poids, que LM avec MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

84. Il s'ensuit de-là que dans la vis la puissance morte est au poids ou à la résistance qu'elle doit vaincre, (§. 3.) comme la distance des filets est à la superficie de la vis. Car la vis n'est autre chose qu'un plan incliné entortillé autour d'un cylindre

(§. 20.) Or la puissance a la direction de son mouvement parallele à la base.

Corollaire II.

85. Par conséquent plus les filets ou arrêtes de la vis sont serrés, plus la vis a d'éfficace; la même grosseur du cylindre toutefois posée.

Corollaire III.

86. Si le poids commence son mouvement en N & va jusqu'en O, il a été élevé à la hauteur OP, & la puissance suit dans son mouvement la ligne PN; donc l'espace parcouru par la puissance, est à l'égard de l'espace que parcourt le poids, comme le poids à l'égard de la puissance morte. (§. 83) Fig. 20.

Corrollaire IV.

87. La même chose se trouve dans la vis; car tandis que la puissance est en mouvement autour de la vis, le poids baisse par la distance des filets: par conséquent, l'espace que le poids parcourt est en même raison avec l'espace que la puissance parcourt, que la distance de deux filets, avec la circonférence de la vis; c'est-à-dire, comme la puissance morte avec le poids. (§. 84.)

Problême XV.

88. Connoissant la puissance, la circonférence de la vis, & la distancedes filets, déterminer la résistance que la puissance peut vaincre par le moyen de la vis.

Solution.

Cherchez un quatriéme nombre proportionel à

la diſtance des filets, à la circonférence de la vis; & à la puiſſance: (§. 85. Arithm.) & vous aurez ce que vous cherchez.

EXEMPLE.

Soit la diſtance des filets 3″, la circonférence de la vis de 25″, la puiſſance de 30 livres..

3—25—30
1 10 10 (§. 59. Arithm.)
Réſiſtance 250 à vaincre.

Problême XVI.

89°. Connoiſſant la puiſſance & le poids, trouver le diamétre de la vis & la diſtance des filets.

Solution.

1°. Diviſez le poids par la force; 1 ſera la diſtance des filets & le quotient ſera la circonférence de la vis. (§. 84.)

2°. Multipliez par ce quotient que vous avez trouvé, la diſtance des filets que vous aurez priſe par pouces ou par lignes, ſuivant les circonſtances, & vous aurez la circonférence de la vis en pouces ou en lignes. (§. 85. Arithm.)

3°. Par-là vous trouverez ſon diamétre. (§. 133. Géom.)

EXEMPLE.

Soit le poids de 250 livres, la force de 30

$\begin{array}{l} 1 \\ 2\not{5}\not{0} \; (8 \frac{1}{3} \\ 3\not{0} \end{array}$ | La distance des filets 3^{m}.

25 La circonférence de la vis

314—100—25

100

30 2500

$\begin{array}{l} 3\not{4}2 \\ 2\not{5}\not{0}\not{0} \\ 314 \end{array} \; (7 \frac{302}{314}$ ou $7 \frac{151}{157}$ le diamétre de la vis.

280

Corollaire.

90. Transportez sur la ligne BC la circonférence trouvée de la vis 25^{m}; élevez une perpendiculaire AB sur B, (§. 70. Géom.) achevez le rectangle ABCD, (§. 99. Géom.) transportez sur cette perpendiculaire les distances des filets, depuis B jusques en A, & depuis C jusques en D, autant de fois qu'il doit y avoir de filets, & tirez les filets B1, 1.2, 2.3, 3.4, &c. le plan ainsi marqué, appliqué autour d'un cylindre, dont la circonférence est égale à BC, marquera les filets qu'on doit former sur le cylindre. Fig. 11.

Remarque.

91. On tourne souvent la vis par le moyen d'une manivelle, qui avec le cylindre forme une machine du même genre que la roue avec son aissieu; (§. 13. & qui par conséquent augmente la force de la vis. (§. 68.)

DEFINITION XXIV.

Fig 21. 92. On appelle vis sans fin celle qui fait tourner une roue à dents.

Corollaire I.

93. Les dents de la roue étoilée doivent s'engrainer dans les filets obliques de la vis.

Remarque.

94. La vis infinie n'a besoin que de trois filets

Corollaire II.

95. Tandis que la vis fait un tour, la roue n'avance que d'une dent, de-là vient que le mouvement de la roue est très lent.

Théorême XII.

Pl. I. Fig. 6. 96. Si la force D par le moyen d'une corde qui entoure une poulie, soutient le poids E, la force sera égale en poids.

Démonstration.

La force D est à l'égard du poids E, comme AC à l'égard de BC; (§. 18. 45.) Or AC = BC; (§. 18.) donc la force est égale au poids. (§. 53. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XIII.

Pl. II. Fig. 23. 97. Si la puissance E soutient le poids F par le moyen d'une corde qui entoure la poulie, de fa-

çon que les deux cordes soient paralleles, & que la poulie soit élevée avec le poids pendant le mouvement; la puissance sera à l'egard du poids comme 1 à l'égard de 2.

Démonstration.

Comme la corde est fixée au point D, & le point F suspendu au point H, la puissance est à l'égard du poids comme AH à l'égard de AB; (§. 59.) or $AH = \frac{1}{2}$ AB. (§. 18.) La puissance est donc la moitié du poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

98. Il s'ensuit donc que dans les *Polyspaste*, ce ne sont pas les poulies supérieures, mais les inférieures qui en augmentent l'effet.

Théorême XIV.

99. Si dans le polyspaste toutes les cordes MN, SX, QR, PO, TV, sont paralleles, la puissance placée en Z, est à l'égard du poids W, comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues. Fig. 24.

Démonstration.

Comme dans ce cas, le poids bande également chaque corde; elles participent également à tout le poids: c'est pourquoi la puissance placée en Z, n'a rien à soutenir que la partie du poids que soutient la corde MN, (§. 96.) par conséquent la puissance est au poids, comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire. I.

100. Si le poids pése 500 livres, & qu'on le divise par le nombre des cordes 5, il en résultera que la puissançe est 100.

Corollaire II.

101. Si l'on multiplie la puissance 100 par le nombre des cordes 5, vous trouverez que le poids pése 500.

Corollaire III.

102. Si vous divisez par la puissance 100 le poids 500, vous trouverez le nombre des poulies; parce que le nombre, tant des supérieures que des inférieures prises ensemble, est le même que celui des cordes.

Remarque.

103. Quelquefois pour ne pas donner trop de hauteur au polyspaste, on ne place point les poulies l'une sur l'autre, mais à côté l'une de l'autre.

Théorême XV.

104. Si par le moyen du polyspaste la puissance met le poids en mouvement, l'espace de la puissance est à l'égard de celui que le poids parcourt, comme le poids à l'égard de la puissance morte.

Démonstration.

S'il faut élever le poids à la hauteur d'un pied, chaque corde qu'il bande doit pareillement se ra-

courcir d'un pied; la puiſſance doit donc tirer la corde à elle en longueur d'autant de pieds que le polyſpaſte contient de cordes; par conſéquent l'eſpace qu'elle parcourt eſt à l'égard de celui que le poids parcourt, comme le nombre des cordes à l'égard de l'unité, c'eſt-à-dire, comme le poids à l'égard de la puiſſance morte. (§. 99.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême XVI.

105. Dans *le coin* la puiſſance eſt au poids ou à la réſiſtance du corps qui doit être fendu, ce que la moitié de la groſſeur ML eſt à la longueur MN. Fig. 20

Démonſtration.

Le coin eſt compoſé de deux plans inclinés, & comme c'eſt la même choſe que le poids ſoit tiré par le montant du plan, ou que celui-ci ſoit pouſſé en avant ſous celui-là; & que d'ailleurs la direction de la puiſſance qui diviſe les corps par le moyen du coin revient à la longueur du coin, la puiſſance eſt au poids comme la moitié de la groſſeur ML à la longueur MN. (§. 83.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

106. Il s'enſuit de là que plus un coin eſt aigu, plus il a d'effet; parce que le rapport de ML à MN ſeroit bien moindre dans un coin moins aigu, que dans celui qui le ſeroit davantage.

Definition XXV.

107. *La roue directe* eſt celle ſur laquelle l'eau tombe, & la fait tourner par ſa peſanteur, en paſſant par deſſus.

Definition XXVI.

108. *La roue retrograde* est celle qui étant suspendue sur l'eau, en reçoit un mouvement rétrogressif que l'eau lui donne en coulant par dessous.

Corrollaire I.

109. Comme il est rare, qu'excepté dans les grandes rivieres l'eau ait assez de rapidité pour faire tourner les roues des moulins; il faut la faire tomber de haut pour lui donner la rapidité requise & propre à faire tourner des corps pesants; d'où l'on doit conclure qu'il faut nécessairement placer la roue dans un lieu beaucoup plus bas que celui d'où l'eau coule.

Corollaire II.

110. L'eau prend sa pente successivement de lieu à autre, il faut donc, pour qu'elle acquierre assez d'impétuosité, changer cette pente en précipice, & par conséquent examiner de quelle nature est cette pente, c'est-à-dire, de combien le lieu où la roue doit être placée, est plus près du centre de la terre que celui d'où l'eau coule.

Definition XXVII.

111. *L'art du nivellement* est l'art de trouver de combien un lieu est plus près du centre de la terre qu'un autre.

Corollaire I.

112. Comme tous les points d'une ligne horisontale sont également éloignés du centre de la terre, (§.

28) il ne faut que tirer cette ligne horisontale d'un lieu à un autre, & mesurer la profondeur de celui-ci, au-dessous de la ligne horisontale de l'autre.

Corollaire II.

113. Il s'ensuit de-là que pour trouver le niveau des eaux, il faut d'abord trouver la ligne horisontale.

Problême XVII.

114. Faire un *niveau*, c'est-à-dire, un instrument par le moyen duquel on trouve la ligne horisontale. Fig. 15.

Solution.

1. Tracez sur une planche bien polie le demi-cercle ACBD que vous diviserez en deux parties égales au point du centre C par une petite ligne DH.

2. Placez deux crochets aux points F & E.

3. Suspendez au centre une boule de plomb, par le moyen d'un fil de soye, ou autre. Si cet instrument est attaché à une corde, par les crochets FE, & que le fil de soye tombe sur la ligne DH, la corde tendue, & le diamétre de l'instrument AB feront une partie de *la ligne horisontale apparente.*

Demonstration.

La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horisontale apparente. (§. 41.) Or le fil CD est la ligne de direction du plomb; (§. 23.) & se trouve perpendiculaire à la ligne AB, s'il touche la ligne DH: (§. 17. 37.

Géom.) donc AB eſt, dans ce cas, la partie de la ligne horiſontale apparente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

115. Riccioli (*Geogr. reform. Lib. 6. chap. 26. f. 229.*) a remarqué que cette ſorte de niveau, à moins qu'il ne ſoit extrêmement grand, peut induire en erreur pour les lieux éloignés les uns des autres, parce qu'à peine marque-t-il la différence de 5 minutes & même d'un demi-dégré: s'il eſt auſſi trop grand, on le tranſporte avec peine: dans ce cas, au lieu du demi-cercle, l'on joint un ais étroit EGHF au diamétre AB, de façon qu'il faſſe un angle droit avec lui, & que le rayon CD puiſſe être prolongé juſqu'à G. On trouvera dans notre grand *Cours de Mathematiques*, les autres eſpéces de niveau qui ſont compoſés de quarts de cercles armés de pinnules.

Pl III. Fig. 26.

DEFINITION XXVIII.

116. *La pente des eaux* eſt une ligne droite qui indique de combien leur ſurface eſt plus éloignée du centre de la terre dans un endroit que dans un autre.

Problême XVIII.

117. Niveler les eaux, ou déterminer leur pente par le moyen d'un niveau, fait avec des quarts de cercle armés de pinnules.

Solution.

1°. Prenez avec un poids attaché à une corde la hauteur que les endroits du rivage que vous

voulez niveller ont au-dessus de la surface des eaux, & marquez ces hauteurs sur le papier. Fig. 27.

2°. Placez le niveau sur le rivage A, & enfoncez sur l'autre B un bâton perpendiculairement à l'horison, auquel vous attacherez un chassis quarré teint en noir; mais marqué au milieu d'un cercle blanc, ou d'une croix blanche; qu'il soit attaché de façon qu'on puisse le fixer aux differents points de ce bâton par le moyen d'une vis.

3°. Baissez ou levez ce chassis jusqu'à ce que celui qui bornoye par les pinnules du quart de cercle apperçoive le centre de ce quarré.

4°. Cherchez depuis A jusqu'à D la hauteur de l'œil, & depuis B jusqu'à C celle du centre du chassis C.

5°. Ajoutez au premier la hauteur du rivage A, & au second celle du rivage B.

6. Comme par cette méthode on voit clairement de combien la ligne CD, parallele à la ligne horisontale A s'écarte dans l'un & l'autre lieu de la superficie des eaux, il ne faut que soustraire la premiere somme trouvée de l'autre: le reste sera la pente des eaux que l'on cherchoit.

On doit concevoir ici le niveau qui a été placé en P, comme placé en A, au lieu du chassis D.

EXEMPLE.

La hauteur du rivage en A 64″. La hauteur du rivage en B. 58′.

AD 56	BC 72
120	130
	120
	La pente 10

7. Si d'un lieu choisi on ne peut appercevoir l'autre, on procédera par parties en divisant la distance donnée en parties que l'on nivellera séparément; mais comme on peut rencontrer dans cet espace des endroits plus élevés que celui où l'on veut commencer à niveller, on placera le niveau EF entre deux bâtons AQ & BH, & l'on marquera séparément à gauche les hauteurs du centre du chassis D, & à droite celles du centre du chassis C.

Formez une somme des premieres hauteurs; additionnez aussi les secondes, & faites la soustraction des unes par les autres; le reste marquera la pente des eaux. La hauteur marquée à gauche AD 34^{ll}. La hauteur à droite BC 57^{ll}.

BO	68	MP	102
La hauteur du rivage en A	64	La hauteur du rivage en M	58
	166		217
			166
		La pente —	51

On fait cette opération avec le niveau, tel que nous l'avons décrit, (§. 114.) en tendant des cordes par le moyen des piquets; & dans ce cas on n'a pas besoin de chassis quarrés.

Problême XIX.

Pl. III. Fig. 28 118. Mouvoir une machine par la force du vent.

Solution.

1. Faites quatres volans ou aîles avec des treillis comme la figure les représente: la longueur EA soit d'environ 30 pieds, & la largeur HI de 6. Attachez-les à angles de 45 dégrés, à un cylindre FL;

FL, car si on les ajustoit à angles droits, le vent ne les feroit point tourner. Les mieux adaptés sont ceux qui coupent l'axe à l'angle de 54 dégrés, parce qu'alors le vent a beaucoup de force pour les faire tourner.

2°. Comme il faut que les volans regardent le vent, toute la machine doit tourner autour de l'axe K, afin que par le moyen du lévier PQ attaché à la tourrette, on puisse tourner la machine du côté qu'on voudra.

Autre façon de Moulin à vent.

1°. Elevez une tour en pierres jusqu'au toît, qui ne doit pas être fixé de façon qu'il ne puisse tourner. Fig. 19.

2°. Faites passer par le toît un cylindre, auquel soient attachés quatres volans, tels que nous les avons dépeints ci-dessus.

3°. Attachez fixément à ce toît une poutre qui sorte en dehors jusqu'à B. Ajoutez-en une autre AB au bout de la premiere, de façon qu'elle descende directement jusqu'à la plate-forme bâtie autour du moulin.

4°. Joignez encore celle dont nous venons de parler, à une autre AC, qui doit être aussi fermement attachée au toit au-dessus de C.

5°. Plantez des crochets de fer d'espaces en espaces sur la plate-forme; puis ayant ajusté un cable au bout de ces solives A, vous le ferez passer par un de ces crochets, & par le moyen d'un cabestan mobile vous ferez tourner le toît.

Remarque.

119. On se sert des moulins de la premiere

ſorte en Allemagne & en diverſes Provinces de France ; les Hollandois employent communément la ſeconde qui eſt auſſi beaucoup en uſage dans la Xaintonge & le Poitou. Pour pouvoir faire tourner commodément le toît de ces derniers, on fixe un anneau de fer cannelé tout autour du haut de la tourrette, au fond duquel on inſére, d'eſpaces en eſpaces des poulies de laiton, dont une partie de la circonférence doit ſortir un peu de la cannelure, ſur laquelle on ajuſte enfin un autre cercle de fer, comme le premier, & ſur ce ſecond on éléve le toit.

Problême XX.

120. Faire une machine qu'un cheval ou autre animal puiſſe faire tourner.

Solution.

1°. Elevez verticalement un cylindre, auquel vous joindrez un timon de 7, 8 pouces, ou davantage ſelon l'éxigence des cas, pour qu'un cheval puiſſe y être attaché.

2°. Placez horiſontalement au-deſſus de ce cylindre, une roue étoilée un peu grande, que vous attacherez à ce cylindre par de groſſes ſolives égales en nombre & en longueur aux rayons de la roue, larges de moitié, mais épaiſſes du double de ces rayons. Suppoſons, par exemple, la longueur des rayons de 7 pieds, leur groſſeur de 2, leur largeur de 7 pouces, & leur nombre de 16 ; la roue doit être attachée avec 16 ſolives dont la longueur ſera de 7 pieds, la groſſeur de 8 $\frac{1}{2}$, & la largeur de 4 pouces.

Problême XXI.

121. Faire une machine qu'un animal puiſſe faire mouvoir avec les pieds.

Solution.

1°. Faites une grande roue garnie de traverſes, telles que les ont les *roues directes*.

2°. Enfermez l'animal dans une étable bâtie au-deſſus, & dont le plancher doit être percé, afin que l'animal appuye ſes pieds de derriere ſur les traverſes.

3°. L'animal appuyant ſes pieds ſur une traverſe, la pouſſe en arriere, & ſe trouve obligé de mettre les pieds ſur la traverſe ſuivante; ainſi la roue eſt toujours en mouvement.

Remarque.

122. S'il ne s'agit que de faire tourner une broche, ou tel autre poids peu peſant, au lieu de traverſes, la roue doit être garnie en devant avec des ais minces: on y enferme un chien dreſſé pour cela qui la fera tourner. C'eſt un tambour de tournebroche.

Problême XXII.

123. Faire une machine qu'un homme puiſſe mettre en mouvement en l'abbaiſſant.

Solution.

Attachez à un cylindre placé horiſontalement pluſieurs bras qui paſſent par le centre de l'axe: ſi vous les baiſſez ſucceſſivement avec la main, le cylindre tournera ſur ſon axe. Fig. 30.

Problême XXIII.

124. Mouvoir une machine en la tournant.

Solution.

Fig. 31. Adaptez à un cylindre une manivelle ou un rectangle ABCD, tel que celui qui eſt dépeint à la figure 31, ou courbé en arc de cercle EFG, com-
Fig 32. me à la figure 32 : par le moyen de ces manivelles vous tournerez le cylindre.

Problême XXIV.

125. Mouvoir une machine en tirant.

Solution.

Pl. I. On le fait par le moyen d'un *treuil* ou *cabeſtan*
Fig. 3. FGIH.

Problême XXV.

126. Mouvoir une machine en la foulant avec les pieds.

Solution.

Faites une grande roue, de la même forme que celle dont nous avons parlé dans la remarque ſur le Problême 21, (§. 122.) & dans laquelle deux hommes puiſſent ſe tenir debout.

Autre Machine.

Pl. III. Placez horiſontalement le lévier HF, dont le
Fig. 33. centre du mouvement F puiſſe ſe mouvoir autour d'un clou de fer.

Suſpendez ce lévier à un cylindre, qui doit traverſer le centre de la roue L, par le moyen d'une

verge ou corde EH attachées à la manivelle BL.

Si vous posez le pied au point G, le lévier baissera, il s'élévera au contraire lorsque vous leverez le pied; & ainsi le cylindre tournera.

Corollaire.

127. Comme dans le dernier cas, le poids que nous devons supposer placé au point H est plus éloigné du centre du mouvement que le pied posé au point G, la force doit être plus grande que le poids qui doit être mis en mouvement; (§. 59.) aussi ne se sert-on de cette façon de mettre en mouvement, qu'à l'égard des poids qui ne sont point considérables. On peut cependant avec moins de force mouvoir le lévier, en appliquant la verge ou corde en G, & la main en H.

Problême XXVI.

128. Faire une machine qui puisse se mouvoir par le moyen d'un poids qui descend.

Solution.

1. Entortillez une corde à un cylindre LM placé horisontalement. Pl. III. Fig. 35.

2. Faites la passer au tour de la poulie G attachée au plancher, ou à un autre endroit élevé.

3. Attachez enfin un poids P à son extrémité; le poids que sa pesanteur fait descendre, développe la corde, & fait tourner le cylindre.

Corollaire I.

129. Plus l'endroit, d'où le poids descend, est élevé, plus la corde se développe lentement, &

plus le mouvement dure, (car dans ce cas elle eſt plus longue.)

Corollaire II.

130. Veut-on faire durer le mouvement plus long-tems; qu'on faſſe paſſer la corde par un polyſpaſte FG, auquel on ſuſpendra le poids P. Suppoſons, par exemple, qu'elle paſſe par quatre poulies, le cylindre doit céder quatre pieds de corde avant que le poids ait deſcendu un pied de hauteur.

Problême XXVII.

131. Aider la force mouvante à lever un poids.

Solution.

Suppoſons, par exemple, que le poids qu'on veut lever eſt de 100 livres.

Fig. 36. 1°. Attachez à ce poids E une corde que vous ferez paſſer par une poulie HF.

2°. Attachez à l'autre bout de cette corde le poids D, preſque égal en peſanteur à celui que vous devez lever.

3°. Si vous tirez la corde du côté du poids HD, il faudra peu de force pour lever l'autre poids E.

Problême XXVIII.

132. Mettre en mouvement une machine élaſtique.

Fig. 37.

Solution.

1°. Faites faire une lame d'acier que vous roulerez. Voilà le corps élaſtique AB.

2°. Vous l'enfermerez dans une petite boëte

cylindrique, & vous attacherez au premier bout une chaîne ou une corde à boyaux.

3°. Comme l'élasticité est plus forte au commencement de la tension, & qu'elle tire avec moins de force sur sa fin. La fusée GLHI à laquelle est attachée la chaîne ou la corde, ne doit pas avoir la forme de cylindre, mais de cône : Car quoique la puissance tire avec plus de force au commencement, & plus lentement sur la fin ; elle est cependant d'abord plus proche du centre du mouvement que sur la fin, & par conséquent dans le premier cas elle a moins d'efficace, & dans l'autre elle en a davantage. (133.)

Remarque.

133. On a trouvé par expérience, de combien la fusée GH doit augmenter en grosseur, depuis G, jusques en H; car on a jugé par la vûe, & par l'ouie, si une montre, qui reçoit tout son mouvement de l'élasticité, avoit ce mouvement uniforme, ou non. Et c'est avec raison que Schot (Techn. Curieuse, liv. 9. ch. 4. prop. 10 pag. 641.) veut que l'on examine aux oscillations d'un balancier, si les circonvolutions d'une roue qui se meut lentement, sont d'une aussi longue durée les unes que les autres.

Problême XXIX.

134. Modérer le mouvement des machines, de maniere qu'il soit toujours uniforme. Pl. III. Fig. 34.

Solution.

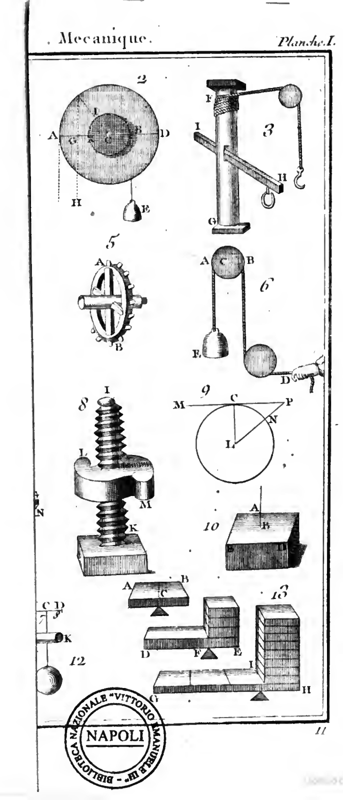
Il faut se servir pour cela de roues posées en

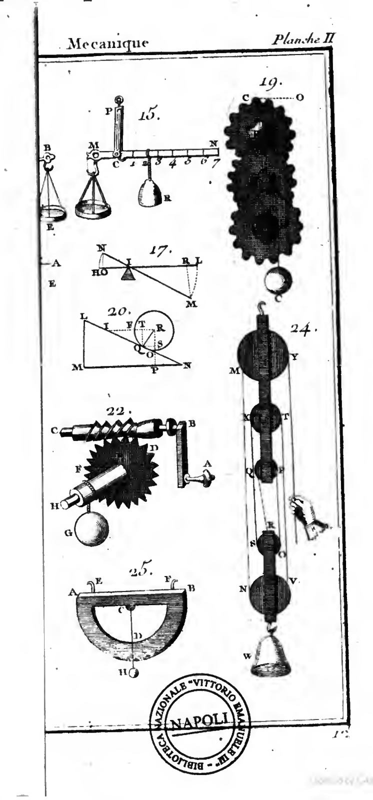
équilibre MN, dont la circonférence est, ou garnie de plômb, ou qui ont quatre poids égaux posés à distance égale : c'est pour cette raison qu'on met des balanciers aux Automates.

Corollaire.

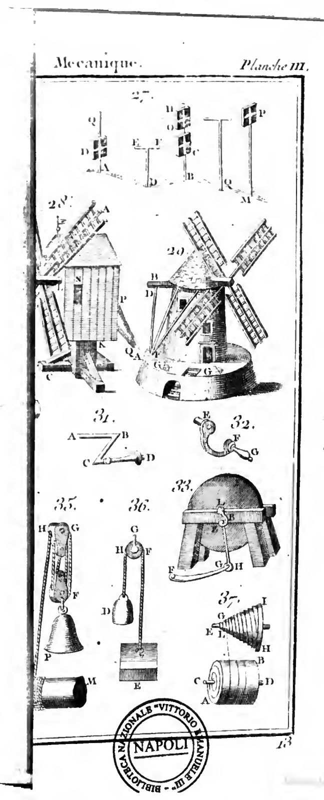
135. Ces roues à contre-poids, sont nécessaires dans les machines que les hommes ou les animaux mettent en mouvement pour rendre ce mouvement égal.

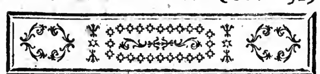
Fin de la Mécanique.


2
A
B
D
G
H
E
3
F
I
H
G
5
A
B
6
A
C
B
E
D
8
I
L
M
K
9
M
C
P
N
L
10
A
B
A
B
C
13
D
F
E
I
G
H
C D
7
K
12
11



Mecanique
Planche II
15.
P
B
M
N
C
1 2 3 4 5 6 7
R
E
17.
N
I
R L
HO
M
A
E
20.
L
I
F
T
R
S
Q
O
M
P
N
22.
C
B
D
F
A
H
G
25.
A
E
F
B
C
D
H
19.
C
O
24.
Y
M
X
T
Q
P
R
S
O
N
V
W


27.
28.
29.
31.
32.
33.
35.
36.
37.



ELEMENS D'HYDROSTATIQUE.

DEFINITION I.

1. L'HYDROSTATIQUE est la Science de l'action des fluides sur les corps, & du rapport des pésanteurs de différens fluides.

DEFINITION II.

2. *Le Corps fluide* est celui dont les parties sont unies, de maniere à pouvoir être séparées très-facilement.

Remarque.

3. Cette proprieté des fluides se reconnoît en ce qu'ils laissent au milieu d'eux un passage libre aux autres corps; que leur poids les fait tomber en goutes; qu'ils prennent aussi-tôt la figure des vases dans lesquels on les verse, & que s'ils n'étoient retenus par ces vases ils s'écouleroient.

DEFINITION III.

4. *Les corps solides* au contraire sont ceux dont les parties sont si adhérentes les unes aux autres,

qu'elles ne peuvent être séparées que difficilement.

DEFINITION IV.

5. *Un corps spécifiquement plus leger* est celui qui sous un même volume a moins de pesanteur qu'un autre.

DEFINITION V.

6. *Un corps spécifiquement plus pésant* est au contraire celui qui sous un même volume a plus de poids qu'un autre.

Remarque.

7. Si une boule de plomb occupe le même volume qu'une boule de pierre, la boule de plomb sera plus pésante que celle de pierre : par consequent le plomb est un corps spécifiquement plus pésant que la pierre, & la pierre au contraire est un corps spécifiquement plus leger que le plomb.

DEFINITION VI.

8. *La force de résistance* est celle qui détruit, en tout ou en partie, l'action d'une autre force.

Axiome I.

9. *Les Corps graves* compriment & tâchent de déplacer ceux qui sont au-dessous d'eux (§. 32. Méchan.)

Axiome II.

10. Plus un corps est pésant, plus il comprime ceux qui sont au-dessous.

Axiome III.

11. Si deux ou plusieurs corps ont la même pésanteur, ils doivent comprimer également.

Axiome IV.

12. Si deux ou plusieurs corps ont la même grandeur, sans avoir la même pésanteur : celui qui a le plus de pesanteur, comprimera davantage que celui qui en a le moins.

Axiome V.

13. Si deux corps se compriment avec des forces égales, mais selon des lignes de direction opposées, il ne s'ensuivra aucun mouvement. Si l'un a plus de force que l'autre n'a de resistance, le plus foible suivra la ligne de direction du plus fort.

Lemme.

14. Si deux cylindres également grands ont cependant la hauteur & leurs bases differentes: la hauteur du premier est contenue autant de fois dans la hauteur du second, que la base de celui-ci est contenue dans la base de celui-là.

Démonstration.

Si vous multipliez les bases de deux cylindres égaux par leurs hauteurs, il en resultera le même produit (§. 197. Géom) Si la hauteur du premier est en raison réciproque avec la hauteur du second, comme la base du premier avec la base du second, le produit de la base du premier par sa hauteur sera égal au produit de la base du second par sa hauteur (§. 81. Arithm.) Par conséquent si deux cylindres sont égaux, la hauteur du premier est à la hauteur

du second, ce que la base de celui-ci est à la base de celui-là. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême I.

15. Si l'on remplit d'eau deux tubes qui se communiquent, l'eau sera à hauteur égale dans l'un & dans l'autre.

Démonstration.

Pl. I: Fig. 1. I. CAS. Si les tubes AB & CD sont à plomb sur la ligne horisontale, & que leurs diamétres soient égaux, l'eau a la même gravité dans l'un & dans l'autre, si elle est à la même hauteur (193. Géom.) par conséquent l'eau EB fait autant d'effort pour chasser l'eau BD que FD lui oppose de résistance (§. 9. 11.) ni l'une ni l'autre ne cedera sa place (§. 13.) l'eau sera donc à la même hauteur dans les deux tubes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 2. II. CAS. Mais si la base du tube GI est quatre fois plus grande que celle du tube HK, & que l'eau descende, par exemple, d'un pouce depuis L jusqu'à O, il faut nécessairement qu'elle monte de quatre pouces dans le petit depuis M jusqu'à N (§. 14.). car supposons que dans le grand tube une livre en mette quatre en mouvement, il en faudra quatre pour en faire mouvoir une dans le petit; par consequent comme l'un & l'autre mouvement demandent la même force, & que leurs lignes de direction sont contraires, l'eau qui est dans le grand tube CI ne peut faire monter plus haut que le point M celle qui est dans le petit HK. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 3. III. CAS. Si le tube PQ fait un angle droit avec la ligne horisontale, & que le tube RS en fasse un oblique, la pesanteur de l'eau qui est dans le tube RS est la même que celle d'un globe sur un

plan incliné : par conſequent l'eau qui eſt dans le tube RS a autant de force que celle du tube TV. Si l'un & l'autre ſont de même hauteur (§. 82. Mécan.) : or par les raiſons du premier & du ſecond cas, l'eau qui eſt dans le tube TV ſoutient celle du tube PQ. Elle doit donc être en équilibre dans les tubes PQ & RS, ſi la colomne eſt égale. *Troiſiéme cas qu'il falloit démontrer.*

IV. CAS. Il s'enſuit de ce que nous venons de dire, que le même équilibre de l'eau doit ſe trouver dans les tubes X W & YZ, ſi elle monte auſſi haut dans l'un que dans l'autre, quoique les tubes aient un diamétre différent, & qu'ils ne faſſent point les mêmes angles avec la ligne horiſontale. *Ce qu'il falloit auſſi démontrer.* Fig. 4.

Corollaire I.

16. Si donc après avoir pris la précaution d'enduire avec de la poix ou autre matiére, tout le dedans du vaiſſeau AB, vous y inférez un long tube par ſon fond ſuperieur C, de façon que l'eau ni l'air ne puiſſe pénétrer dans le vaiſſeau que par le tube ; & qu'enſuite vous rempliſſiez d'eau le tube & le vaiſſeau, vous verrez que le peu d'eau que renferme le tube CD preſſera ſi fort le fond AE, qu'elle pourroit enlever un poids de cent livres, parce que l'effort que fait l'eau dans le tube CD eſt auſſi grand qu'il le ſeroit dans tout le cylindre FA. Fig. 5.

Corollaire II.

17. C'eſt pourquoi il ne faut regarder dans la preſſion des fluides que leur hauteur & la grandeur de la baſe qui reſiſte à la preſſion.

Théorême II.

Fig. 1. 18. Si l'on remplit deux tubes qui se communiquent, de liqueurs de différente pésanteur, la hauteur du fluide spécifiquement plus leger est à la hauteur du plus pésant, comme la gravité du plus pésant à la gravité du plus leger sous un même volume.

Démonstration.

Fig. 1. Mettez, par exemple, du mercure dans le tube CD, & de l'eau dans le tube AB. Comme le mercure est quatorze fois plus pésant que l'eau, elle doit monter quatorze fois plus haut dans le tube AB que le mercure dans le tube CD : car si les tubes sont de même grandeur, les cylindres sont en même raison que leurs hauteurs (§. 210. Géom.) par conséquent si le mercure monte quatorze fois moins haut dans le tube CD que l'eau dans le tube AB, il y aura quatorze fois plus d'eau dans le tube AB, que de mercure dans le tube CD ; par conséquent la pésanteur de l'eau sera égale à celle du mercure : c'est pourquoi comme le mercure presse autant vers DB que l'eau vers BD (§. 11.) l'un & l'autre doivent être en équilibre (§. 13.) : & comme il n'importe que les tubes ayent le même diametre, ou qu'ils soient perpendiculaires sur la ligne horisontale (§. 15.) le mercure & l'eau demeureront toujours en équilibre, quoique la hauteur de l'eau soit quatorze fois plus grande que celle du mercure. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Théorême III.

19. Si l'on jette dans un fluide un corps qui a

plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps perd autant de son poids qu'en a le fluide dont il prend la place.

Démonstration.

Supposons, par exemple, qu'on plonge dans l'eau un pied cubique de plomb; le pied cubique d'eau qu'il chasse étoit soutenu par celle qui l'environnoit; or si le plomb prend sa place, il faut que l'eau qui l'environne soutienne une partie du poids égale à celle de l'eau dont il a pris la place; par conséquent le plomb perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau. *Ce que j'avois à démontrer.*

Corollaire I.

20. Comme un pied cubique de fer perd autant qu'un pied cubique de plomb, quoique celui-ci soit plus pésant que l'autre, il est évident que le fer & tout autre corps qui a plus de legéreté spécifique, perd dans un fluide, par exemple, dans l'eau, une plus grande partie de son poids que le plomb ou tout autre corps spécifiquement plus pésant.

Corollaire II.

21. Quoique un corps qui a plus de pésanteur spécifique qu'un autre soit avec lui en équilibre dans l'air, le plomb, par exemple avec le fer, ils ne le seront pourtant pas dans l'eau ou dans tout autre fluide; mais le plomb gravitera davantage.

Corollaire III.

22. Comme un pied cubique de plomb plongé dans l'eau perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau, & que dans le vin au contraire il

n'en perd qu'autant qu'en a un pied cubique de vin. Le plomb perd plus de son poids dans l'eau, que dans le vin, & par conséquent tout corps perd plus de son poids dans un fluide qui a plus de pésanteur spécifique, que dans celui qui en a moins.

Corollaire IV.

23. De-là vient que deux livres de plomb, dont on plonge l'une dans l'eau & l'autre dans le vin, ne sont point en équilibre : & en général deux corps de même espéce & de même grandeur ne sont point en équilibre si on les plonge dans les fluides de différente gravité.

Corollaire V.

24. La pesanteur d'un fluide est à la pésanteur d'un corps de même grandeur, comme la partie du poids qu'il perd à son poids entier. Par exemple, la pésanteur de l'eau est à la pésanteur du fer comme la partie du poids qu'il perd dans l'eau à son poids entier.

Problême I.

25. Trouver le poids de quelque fluide que ce soit, du vin par exemple, qui est dans un tonneau.

Solution.

1°. J'attache un pouce cubique de plomb à un fil, je le plonge dans le fluide, par exemple dans le vin, & je remarque la quantité du poids qu'il perd ; je connois alors quel est le poids d'un pouce cubique du fluide donné. (§. 19.)

2°. Determinez géométriquement le volume du fluide, par exemple, du vin qui est dans un tonneau. (§. 215. Geom.) cela fait, vous trouverez par la Regle

Regle de trois (§. 85. Arithm.) le poids de tout le fluide.

EXEMPLE.

Un pied cubique de plomb selon la mesure de Paris, perd dans l'eau 72 livres. On demande le poids de 345 pieds cubiques d'eau.

1′ — 72. liv. — 345
72
690
2415

Le poids de l'eau est de 24840 liv.

Corollaire.

26. Ayant determiné le poids du fluide, vous pourrez pareillement trouver son volume. Vous demandez, par exemple, quel espace occupent 325000 liv. d'eau.

72 liv. — 1′ — 325000 liv.
1
325000
(4513′ $\frac{8}{9}$ le volume d'eau.

Problême II.

27. Trouver en quelle raison est la pesanteur d'un fluide avec la pesanteur d'un autre fluide sous un même volume.

Solution.

1°. Examinez combien un pouce cubique de pier-

re perd de son poids dans l'eau ; vous connoîtrez par-là le poids d'un pouce cubique d'eau (§. 19.)

2°. Examinez également combien le même pouce cubique de pierre perd de son poids dans un autre fluide, dans de l'huile, par exemple ; vous connoîtrez de même le poids d'un pouce cubique d'huile (§. 19. Ainsi la pésanteur de l'eau est à la pésanteur de l'huile, comme le poids que perd un pouce cubique de pierre dans l'eau, au poids qu'il perd dans l'huile.

Par exemple. Un pied cubique de pierre perd 72 livres dans l'eau & 66 dans l'huile ; la pésanteur de l'eau est donc à la pesanteur de l'huile, comme 72 liv. sont à 66, ou comme 12 sont avec 11 (§. 59. Arith.)

Problême III.

28. Connoissant le poids d'un corps composé de deux matieres, & la quantité qu'il perd de son poids dans un fluide, trouver le poids de l'une & de l'autre matiere en particulier.

Solution.

1°. Prenez séparement une livre, ou telle autre quantité de chaque matiere, & par l'expérience que vous en ferez, déterminez ce qu'elle perd de son poids dans un fluide.

2°. Vous chercherez ensuite par la Regle de trois ce qu'un volume de chacune devroit perdre dans le même fluide, s'il pesoit autant que tout le corps composé.

3°. Soustrayez la diminution de l'une & de l'autre pour connoître combien le corps qui a moins de pésanteur spécifique a plus perdu de son poids que le corps qui en a davantage.

4°. Retranchez encore le poids du corps qui a le plus de gravité spécifique, de la diminution du poids qu'a le corps mixte, pour connoître de combien la perte du poids, que ce corps mixte a fait, est plus grande que celle du corps spécifiquement plus pesant.

5°. Que si vous cherchez un quatriéme nombre proportionnel à l'excès du premier, à celui du second & au poids du corps mixte, (§. 85. Arith.) ce quatriéme nombre proportionnel sera le poids du corps mixte spécifiquement plus leger, lequel étant ôté du poids du corps mixte, il restera le poids du volume qui a le plus de pésanteur specifique ; & par-là vous trouverez ce que vous demandez.

EXEMPLE.

Une masse composée d'étain & de plomb du poids de 120 liv. en perd 14 quand on la plonge dans l'eau. On demande quel est le poids du plomb ? quel est celui de l'étain ? l'expérience fait connoître qu'une masse d'étain de 37 liv. en perd cinq étant plongée dans l'eau, & qu'une masse de plomb de 23 liv. en perd 2 étant plongée dans le même fluide. Cela connu, vous ferez ainsi votre calcul.

$$
\begin{array}{r}
37 - 5 - 120 \\
5 \\
\hline
600 \\
\hline
37
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
23 - 2 - 120 \\
2 \\
\hline
240 \\
\hline
23
\end{array}
$$

$$\frac{600}{37}-\frac{240}{23}=\frac{13800-8880}{851}=\frac{4920}{851}$$

$$\frac{14-8880}{851}=\frac{11914-8880}{851}=\frac{3034}{851}$$

4920—3034—120
41 1 (120
1
26
3034 (74. liv. le poids spécifiquement plus leger.
411 | 120 poids du mixte.
4 | 46 le poids spécifiquement plus pésant.

Remarque.

29. On peut résoudre de la même façon le problême qui donna naissance à l'hydrostatique, & qu'Archimede explique le premier; sçavoir combien l'ouvrier avoit mêlé d'argent avec l'or dont il avoit fait la couronne du Roi de Siracuse, qui pésoit 18 livres; car comme 18 liv. d'or en perdent une dans l'eau, & 18 liv. d'argent $1\frac{1}{2}$, il s'apperçut que la couronne en perdit $1\frac{1}{3}$, & il découvrit par-là qu'il y avoit dans cette couronne 12 liv. d'argent mêlées avec six liv. d'or.

Théorême IV.

30. Si l'on plonge un corps dans un fluide qui ait moins de pésanteur spécifique que lui, il ne descend au fond qu'avec une force égale à la différence de son poids, & de celui du fluide de même volume.

Démonstration.

Ce corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du fluide dont il occupe la place (§. 19.) par conséquent il ne peut descendre qu'avec la force qui lui reste, & qui est égale à la différence de son poids & de celui du fluide de même volume.

Corollaire I.

31. La force qui soutient un corps dans l'eau est égale à l'excès de gravité de ce corps au-dessus de la gravité d'un égal volume d'eau. Trente-sept liv. d'étain, par exemple, plongées dans l'eau perdent cinq livres de leur poids; donc trente deux livres d'eau peuvent soutenir trente-sept livres d'étain plongées dans ce fluide.

Remarque.

32. Connoissant la grandeur & la pésanteur d'un solide plongé dans l'eau, on peut déterminer quelle force il faudroit employer pour l'élever au-dessus de ce fluide.

Supposons que le poids d'une masse plongée est de 104500 liv. la grandeur de 340 pieds cubiques; le pied cubique d'eau de 72 liv.

```
   340
    72
   ---
   680
  238
 -----
 24480 liv. le poids d'eau égal à la masse plongée
104500 le poids de la masse.
------
 80020 la force capable de soutenir la masse.
```

Corollaire II.

33. C'est pourquoi le poids d'un corps solide excédant davantage le poids d'un fluide qui a plus de pésanteur spécifique, & dont il a pris la place, qu'il ne feroit dans un fluide qui a moins de pésanteur; il est nécessaire qu'il s'enfonce avec plus de vitesse dans celui-ci que dans celui-là. Par exemple une boule de plomb s'enfonce plus vîte dans le vin que dans l'eau.

Théorême V.

34. Si un corps est plongé dans un fluide qui a plus de pésanteur spécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans ce fluide, par exemple, dans l'eau jusqu'à ce que l'eau, qui rempliroit l'espace occupé par la partie du corps plongé, soit en équilibre avec tout le corps entier.

Démonstration.

Supposons que ce corps est un cylindre de bois. Concevons le fluide comme composé de plusieurs cylindres qui pésent tous également, parce qu'ils ont tous une hauteur égale (§. 15.) Or si le cylindre de bois est plongé dans l'eau, le cylindre d'eau qui est sous lui doit plus presser que les collateraux ne résistent (§. 10.); il chassera donc en haut l'eau collaterale (§. 13.) & le cylindre de bois s'enfoncera. Or si-tôt que le cylindre de bois a chassé une quantité d'eau égale à son propre poids entier, le cylindre d'eau qui le soutient, n'est pas plus pésant qu'il l'étoit, lorsque l'eau occupoit la place du cylindre de bois; par conséquent le cylindre de bois ne s'enfoncera pas plus avant, & il n'occupera que la place des parties d'eau qui ont été

chassées, parce que actuellement comme auparavant elles pesent autant que lui. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

35. Si vous plongez le même corps dans des fluides de différente pésanteur spécifique, il doit s'enfoncer plus avant dans celui qui est moins pésant que dans celui qui l'est davantage. Par exemple, plus dans le vin que dans l'eau, parce que le vin a moins de pésanteur spécifique que l'eau, & parce que la gravité de ce corps approche moins de celle de l'eau que de celle du vin.

Corollaire II.

36. Un corps s'enfonce plus avant dans un fluide à proportion de ce qu'il approche davantage de la gravité de ce fluide. Par exemple, un morceau de bois qui a plus de pésanteur spécifique qu'un autre, doit s'enfoncer davantage que celui qui en a moins.

Corollaire III.

37. Si ce corps a la même pésanteur spécifique que le fluide, de façon que, par exemple, un pied cubique de ce corps pese autant qu'un pied cubique d'eau, tout le corps s'enfonce & demeure en quelque lieu du fluide qu'on le mette.

Corollaire IV.

38. S'il n'y a que la quatriéme partie de ce corps qui soit plongée, la quatriéme partie d'autant d'eau, pese autant que le corps tout entier : c'est pourquoi si vous prenez quatre parties d'eau, c'est-à-dire, autant qu'il en tiendroit dans l'espace que le corps occupe, leur poids est quatre fois plus

grand que celui du corps; par conséquent la pésanteur du corps est à la pésanteur du fluide de même volume, comme la grandeur de la partie plongée à la grandeur entiére de tout le corps.

Corollaire V.

39. Il s'ensuit encore de-là qu'un corps spécifiquement plus leger qu'un fluide, ne s'élevera point du fond du vase où on l'aura mis, si un fluide spécifiquement plus pésant, qu'on y auroit versé ne s'éleve lui-même au-dessus de la partie du corps qui se trouve plongée, pendant qu'il nâge dans le vase plein de ce fluide.

Problême IV.

40. Connoissant la pésanteur d'un pied cubique d'eau & la grandeur de la partie du solide qui est plongée, trouver le poids de tout le corps.

Solution.

Comme le poids d'un corps solide est égal au poids de l'eau qui occupe le même espace que la partie plongée (§. 34.) dites; la partie plongée d'un solide est au poids du solide entier, comme un pied cubique d'eau à sa pésanteur connue: ce que vous trouverez par la Regle de Trois. (§. 85. Arithm.)

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau eſt de 72 liv. la partie du corps qui eſt plongée eſt de 740 pieds cubiques.

1 — 72. liv. — 740'
72
1480
518
53280 l. le poids de tout le corps.

Problême V.

41. Connoiſſant la gravité d'un pied cubique d'eau & celle du corps ſolide, trouver la grandeur de la partie qui doit être plongée.

Solution.

Le poids du corps donné étant à la grandeur de la partie qui doit être plongée, comme la péſanteur d'un pied cubique d'eau eſt à l'égard de la grandeur du même pied cubique. (§. 34.) vous trouverez encore par la Regle de trois (§. 85. Arith.) la grandeur que vous cherchez de la partie qui doit être plongée.

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau eſt de 72 liv. la péſanteur du corps de 53280. liv.

72 liv. — 1' — 53280 liv.
1
53280

2
48
53280 (740'. la grandeur de la partie qui doit être plongée.
7222
77

Remarque.

42. La résolution de ce Problême vous fera trouver la quantité du poids qu'un vaisseau peut porter.

Problême VI.

43. Connoissant la grandeur & la pésanteur d'un solide, par exemple, d'un morceau de bois, & la pésanteur d'un fluide spécifiquement plus pésant, par exemple d'un pied cubique d'eau, trouver la force qui peut retenir ce corps au fond du fluide.

Solution.

Il est évident par le (§. 34.) que cette force doit égaler l'excès du poids de l'eau qui occupe la même place que ce solide, au-dessus du poids de ce solide.

1°. Cherchez donc par la Regle de trois (§. 85. Arithm.) la pésanteur de l'eau qui occupe la même place que tout le solide, par la pésanteur donnée d'un pied cubique d'eau, & la grandeur du solide que vous connoissez aussi.

2°. Soustrayez ensuite le poids du solide, le reste sera la puissance que vous cherchez.

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau pése 72 liv. le corps solide qui doit être retenu au fond de l'eau en pése 100. la grandeur est de 8 pieds cubiques : cela supposé.

1' — 72 — 8'
8

576 liv. le poids de l'eau égale au solide.
100 liv. le poids du corps.

La puissance qui retient le corps au fond de l'eau doit être de 476 liv.

Corollaire.

44. Comme le corps èst poussé en haut par la même force qui pourroit le retenir au fond du fluide, on peut trouver par le même Problême quelle est la force qui pousse en haut un corps plus leger que le fluide dans lequel il est. Elle est la même que dans l'exemple précedent de 476. liv.

Théorême VI.

45. La puissance nécessaire pour enfoncer dans l'eau le vase vuide AB jusqu'à la ligne AC ; ligne jusqu'à laquelle s'il étoit rempli, il s'enfonceroit ; cette puissance est égale à celle qui pourroit soutenir en l'air autant d'eau qu'il en tiendroit dans le vase jusqu'à la ligne AC. Fig. 6.

Demonstration.

La puissance ou la force qui soutient l'eau en l'air est égale à sa pésanteur ; or la force qui enfonce dans l'eau le vase vuide jusqu'à la ligne AC, pese autant que l'eau qui le remplit, puisqu'elle est supposée enfoncer le vase jusqu'à cette ligne ; donc cette force égale celle qui pourroit soutenir l'eau contenue dans le vase (§. 22. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorême VII.

46. La force qui est nécessaire pour retenir un corps qui a moins de pésanteur, sous un fluide qui en a davantage, & le poids que ce corps perd augmentent la pésanteur du fluide, & pesent avec lui.

Démonstration.

La force nécessaire pour retenir un corps qui a

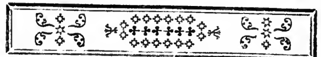
moins de péſanteur ſous un fluide qui en a davantage, gravite ſur le fluide, de ſorte que c'eſt comme ſi une maſſe de même poids lui étoit ajoutée. Or cette maſſe ne faiſant qu'un corps grave avec le fluide péſeroit avec lui; donc une force égale à cette maſſe doit péſer avec le fluide. Voilà le premier article.

Quand au ſecond, la partie du poids que perd dans un fluide plus leger un corps qui a plus de péſanteur, eſt ſoutenue par ce fluide, comme nous l'avons demontré dans le Théorême 3. (§. 19.) Or cette partie du poids jointe avec l'eau qui eſt deſſus & deſſous dans le même cylindre, péſant autant que l'eau qui l'environne, il eſt néceſſaire qu'elle comprime le fond du vaiſſeau avec cette eau, & que par conſéquent elle gravite avec elle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

47. On prouve aiſément par l'expérience ce que nous avons démontré juſqu'ici. Nous devons regarder ces expériences comme des examens qui nous prouvent la bonté, la juſteſſe & la vérité de nos raiſonnemens.

Fin de l'Hydroſtatique.



ELEMENS D'AIROMETRIE.

Definition I.

1. L'*Airométrie* eſt la Science de meſurer l'air, ou la Science qui nous apprend à connoître les différens degrés de péſanteur, de reſſort, de compreſſion, de dilatation, &c. de l'air.

Definition II.

2. *Meſurer.* C'eſt prendre pour une unité une certaine quantité ou grandeur d'un corps, & chercher le rapport que les autres grandeurs ou quantités de même eſpéce ont avec celle qu'on ne conſidere que comme une unité.

Remarque.

3. Par exemple, je veux meſurer une piéce d'étoffe, je prends une grandeur determinée que j'appelle aune, & que je conſidere comme une unité: j'examine combien de fois la longueur de cette aune ſe trouve dans la longueur de l'étoffe. Veux-je meſurer la chaleur de l'air? je prends pareillement un certain degré de chaleur pour une unité, & je

cherche ensuite le rapport que la chaleur entiére de l'air a avec ce degré determiné ; c'est-à-dire, que j'examine combien de fois ce degré determiné se trouve dans la chaleur entiere que je veux mesurer. (§. 52. Arith.)

Corollaire.

4. Comme sous le terme de quantité est compris tout ce qui peut être augmenté ou diminué, on peut mesurer tout ce qu'on peut concevoir dans l'air, susceptible de dilatation ou de raréfaction.

DEFINITION III.

5. Par *l'air* j'entends un corps fluide répandu autour de la terre, qui occupe les espaces que les autres corps abandonnent, & qui nous paroissent vuides, à moins qu'un autre corps plus fort ne l'en empêche.

Remarque.

6. Nous ne donnons ici à l'air que la propriété essentielle qui peut le faire connoître.

Corollaire.

7. Si l'on pousse la main avec célerité dans l'espace qui nous paroît vuide, & vers le visage, on sent que quelque corps le touche légerement, quoique la main ne le touche pas. Il faut donc que ces espaces soient remplis d'une certaine matiere très-subtile qu'on ne voit point, & dont les parties ne sont pas assez adhérentes les unes aux autres pour empêcher le mouvement des corps. Il y a donc un fluide très-subtil qui remplit sur la terre les espaces

que les autres corps abandonnent, (§. 2 Hydrost.) c'est-à-dire que l'air existe. (§. 5.)

Definition IV.

8. Un *Corps est comprimé* lorsque la matiere dont il est composé, est resserrée dans un plus petit espace que celui qu'elle occupoit.

Definition V.

9. *Un corps se dilate* lorsque sa matiere remplit un plus grand espace qu'auparavant.

Remarque.

10. La matiere propre d'un corps est celle qui pése avec lui, qui est en mouvement avec lui, & qui dans ce mouvement va heurter contre les autres corps. Pour la matiere qui passe librement à travers d'un corps, nous l'appellons *matiére héterogene ou étrangere.*

Problême I.

11. Faire une *Pompe pnéumatique*; c'est-à-dire, un instrument par le moyen duquel on puisse tirer tout l'air d'un vaisseau.

Solution.

1°. Faites un cylindre creux de laiton AB, & dont la surface intérieure soit extremement unie, afin que le *Piston* DE la frotte exactement de toutes parts, & que la moindre partie d'air ne puisse s'échapper. *Fig. 1.*

2°. Le *Piston* doit être composé de cercles de cuir enduits de graisse cuite de cochon, & d'huile d'olives, & renfermés entre deux autres cercles

de cuivre, l'un à la partie ſuperieure D, & l'autre à la partie inférieure E, leſquels cercles de cuivre ſont retenus par une vis. Attachez enſuite au piſton une lame de fer DC dentée depuis C juſqu'à D, afin que par le moyen de la manivelle NO, & d'une petite roue dentée attachée au cylindre, on puiſſe l'introduire & le retirer commodement. Il eſt bon de remarquer qu'on feroit bien de prendre à cet effet du cuir dont on fait les ceinturons des ſoldats; c'eſt-à-dire, du cuir de bœuf, ou plutôt celui de cerf, étant plus ſouple que l'autre.

3°. Il faut ſouder à la baſe du cylindre B un petit tube BFKL, dans lequel on puiſſe introduire un robinet GHI au point F, afin de pouvoir ouvrir ou fermer la pompe quand on voudra. Le robinet doit être percé au milieu, pour que l'air puiſſe s'introduire dans la pompe après avoir paſſé par le petit tube LK; il doit l'être encore, mais obliquement à un de ſes côtés, dans la partie ſupérieure, afin que l'air qui eſt dans la machine puiſſe ſortir par la cavité du piſton. Dans le haut eſt une aiguille de laiton pour fermer la cavité du robinet lorſque le cas l'exige.

4°. Enfin le tube KL doit avoir une vis au point L pour tenir fermes les vaiſſeaux dont on veut pomper l'air, & dont les orifices ſeront fermés de vis femelles. C'eſt ainſi qu'il faut, quand l'uſage le demande, adapter le baſſin de laiton PQ ſur lequel on puiſſe mettre commodément un verre en forme de cloche.

Remarque.

12. On ſoude un baſſin au-deſſus vers le point A, & l'on y met de l'eau, pour empêcher que l'air, la pouſſiere, ou telle autre ordure que ce

ce puisse être, ne s'introduise entre le piston & la superficie intérieure du cylindre. On couvre le fond du bassin avec un cuir mouillé, parce que sans cette précaution les cloches de verre ne joindroient pas assez exactement pour empêcher l'air d'entrer. C'est pour cela qu'on garnit les tuyaux avec des cercles de cuir imbibé de suif chaud. Lorsque le piston a de la peine à entrer, il faut l'enduire d'huile d'olive, & le robinet de suif chaud.

Experience I.

13. Si vous mettez sous une cloche de verre une vessie d'agneau toute flasque, n'ayant d'autre air que celui qui est dans les plis, & fermée avec un cordon par le col; cette vessie s'enflera à proportion de l'air que vous tirerez de la cloche. Que si vous laissez rentrer l'air par le moyen du robinet, la vessie désenflera, deviendra flasque, & reprendra son premier état.

Corollaire.

14. Comme il ne reste dans la vessie que le peu d'air qui se trouve dans les replis, il faut que cet air se dilate, à mesure qu'on pompe celui qui l'entoure. (§. 9.) autrement la vessie ne s'enfleroit point. Et comme elle s'enfle à proportion qu'on pompe l'air qui l'environne; il est clair qu'il faut qu'il y ait dans l'air une élasticité ou vertu de dilatation, & qu'à moins qu'une puissance plus forte ne lui résiste, elle aura constament son effet.

DEFINITION VI.

15. Nous appellerons dans la suite force élasti-

que, celle qui rend l'air capable de compreſſion & de dilatation.

Corollaire.

Fig. 1. 16. Si vous tirez le piſton DE de la machine pneumatique AB, il ſe fait dans la cavité de cette machine un eſpace vuide, dans lequel l'air extérieur n'a aucune entrée. Que ſi vous ouvrez le robinet GH, l'air qui eſt ſous la cloche du baſſin PQ ſe dilate & s'introduit par le tuyau LKF dans la cavité de la machine, juſqu'à ce qu'il ſoit également condenſé par tout. Ainſi celui qui eſt reſté dans la cloche eſt plus rarefié qu'il ne l'étoit auparavant. Si après cela vous tournez le robinet GH de façon que l'ouverture oblique qui eſt au-deſſus reponde à la cavité de la machine, ſi vous tirez l'aiguille de laiton, & que vous pouſſiez le piſton DE dans la pompe; l'air ſera chaſſé par le tuyau FG, & par le robinet GK.

Expérience II.

17. Attachez avec du ciment à un globe creux
Fig. 4. & d'un aſſez gros volume A, un tuyau de cuivre court, armé d'un robinet & d'une vis femelle B, pour qu'on puiſſe le fermer & l'attacher à la pompe
Fig. 1. L. Pompez autant que vous le pourrez tout l'air qu'il contient; après cela fermez le robinet, & tirez ce globe de deſſus la machine. Vous le mettrez dans un des baſſins d'une balance, & vous chargerez l'autre avec des poids, juſqu'à ce qu'ils ſoient en équilibre avec ce globe. Si vous ouvrez enſuite le robinet, vous entendrez l'air du dehors y entrer avec bruit, & le globe deviendra plus péſant qu'il n'étoit lorſqu'il étoit vuide.

Corollaire I.

18. Puiſque ce globe plein d'air peſe plus dans la balance que s'il étoit vuide ; il eſt donc clair que l'air eſt péſant. (§. 32. Mecan.)

Remarque premiere.

19. C'eſt en ſuivant cette méthode que Burcher de Volder a découvert qu'un pied cubique d'air peſe une once & 27 grains, ou preſque 507 grains. Voyez les queſtions académiques ſur la gravité de l'air. Theſe 48. pag. 50. & les ſuiv.

Corollaire II.

20. L'air étant ſuſceptible de compreſſion, & le ſupérieur gravitant ſur l'inférieur (§. 18. Airom. & §. 9. Hydroſt.) il n'eſt pas ſurprenant que celui-là ſoit plus rarefié, & celui-ci plus condenſé.

Corollaire III.

21. Il s'enſuit de-là qu'un volume d'air inférieur a plus de péſanteur ſpécifique qu'un égal volume d'air ſupérieur, puiſqu'un même eſpace contient plus de parties du premier que du ſecond.

Remarque ſeconde.

22. Il n'eſt donc point ſurprenant que les vapeurs qui montent par l'air inférieur, s'attachent à l'air ſuperieur, & demeurent ſuſpendues. (§. 37. Hydroſt.)

Théorême I.

23. La vertu élaſtique de l'air eſt égale à la force qui le comprime.

Démonstration.

L'air étant moins comprimé par une force plus petite qu'il ne l'est par une plus grande, sans doute qu'il resiste à cette force ; or l'air a une vertu élastique dont la proprieté est de faire effort pour se dilater autant qu'il est possible (§. 15.) il faut donc pour avoir cet effet, qu'il résiste par sa vertu élastique à la force qui le comprime (§. 8. Hydrost.) & comme celle-ci ne peut rien de plus sur celle-là, il faut qu'elles soient égales (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

24. Par conséquent plus l'air est comprimé, plus sa vertu élastique acquiert de force ; au contraire plus il est rarefié, plus elle est foible.

Corollaire II.

25. Si l'air est donc comprimé dans un espace deux fois plus étroit, sa vertu élastique devient plus forte du double. Si l'espace est trois fois plus étroit, elle est plus forte du triple, &c. qu'elle n'étoit auparavant.

Corollaire III.

26. La force élastique de l'air inférieur est aussi grande que la gravité du supérieur qui le comprime.

Corollaire IV.

27. L'air inférieur fait par son élasticité ce que le supérieur fait par sa gravité.

Expérience III.

28. Si vous remplissez d'eau un tube dont la longueur surpasse 32 pieds du Rhin, & dont l'ouverture supérieure soit bien bouchée, & celle d'en-bas fermée par un robinet; tenant après cela le tube élevé verticalement, plongez le robinet dans l'eau; si ayant ouvert l'orifice vous ouvrez aussi le robinet, toute l'eau s'écoulera; mais si vous ouvrez seulement le robinet, l'orifice étant toujours bien bouché, l'eau restera suspendue à la hauteur de 31 ou 32 pieds au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle le tuyau est plongé.

Corollaire I.

29. Puisque l'eau suspendue dans le tube comprime celle qui est dans le petit vase placé au-dessous (§. 9. Hydrost.) & que cependant celle-ci ne lui cede pas, il faut donc qu'elle soit comprimée également tout à l'entour; or l'air en s'appuyant sur l'eau la comprime (§. 18.); par conséquent l'air comprime la surface de l'eau qui environne le tube avec une force égale à celle du cylindre d'eau qui a pour base le cercle de cette surface, & 32 pieds du Rhin de hauteur. Une colonne d'air dont le diamétre est égal au diamétre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface de l'eau du vase, jusqu'au haut de l'athmosphere, ne pese donc pas plus que la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Corollaire II.

30. Puisque l'air tient l'eau suspendue dans le tube à la hauteur de 32 pieds, & que le mercure est quatorze fois plus pésant que l'eau; l'air ne

tiendra donc le mercure suspendu dans le même tube qu'à la hauteur de la quatorziéme partie de 32 pieds (§. 18. Hydrost.)

Remarque.

Fig. 3. 31. De-là vient que si vous remplissez de mercure un tube de verre AB dont l'orifice superieur soit fermé hermétiquement, & que vous plongiez ce tube dans un vase plein de mercure; celui qui est dans le tube ne tombera pas absolument; mais il sera suspendu à la hauteur d'environ 28 pouces. Toricelli a fait cette decouverte; c'est pourquoi on appelle ce tube, *le tube de Toricelli*, ou *Barométre*. Que si vous jettez de l'eau dans le vase où est le mercure, il montera plus haut dans le tube, parce que l'air pese alors avec l'eau, & leur action étant réunie, elle devient plus forte: au contraire si vous mettez ce tube sous une cloche de verre à grand col, & dont vous pompez l'air, à mesure que l'air manquera, le mercure descendra.

Problême II.

32. Connoissant la base d'une colonne d'air, trouver le poids de cette colonne.

Solution.

1°. Multipliez la base de la colonne d'air par la hauteur d'une colonne d'eau d'égale pésanteur (§. 29) le produit sera la solidité de la colonne d'eau ayant un même poids avec la colonne d'air. (§. 197. Géom.)

2°. Si vous connoissez le poids d'un pied cubique d'eau, vous trouverez aussi par la Regle de Trois

celui de la colonne d'air. (§. 85. Arithm.)

EXEMPLE.

Soit le diamétre du cercle 100''' l'aire sera de 7850''' (§. 134. Géom.)

La hauteur de la colonne d'eau de 3100'''

```
                                              785000
                                             23550
La solidité de la colonne d'eau de 24335000'''
            1000'' — 72 liv. ——— 24335''
                                              72
                                           48670
                                          170345
                                          1752120
```

1752120 (1752 $\frac{3}{25}$ le poids de la colonne d'air.
1 000

Corollaire.

33. Si le diamétre d'une sphére est 1, la base de la colonne d'air qui tombe sur cette sphére sera un cercle dont le diamétre est 1 ; c'est-à-dire, le plus grand cercle d'une sphére ; par conséquent son poids est de 1752 liv. On doit remarquer que cette colonne presse également dessus & dessous. (§. 26. 27.)

Théorême II.

34. Si un vase est rempli d'air, il n'éprouve aucun effet de la pression de celui qui l'environne ; mais si on ôte cet air, l'effet qui s'ensuit répond à la force de l'air extérieur qui le comprime.

Démonstration.

Si l'air qui remplit le vase a la même densité que

celui qui l'environne, l'élasticité de l'air renfermé est égale à la force de l'air extérieur qui le comprime (§. 23.) donc l'air renfermé dans le vase oppose autant de résistance à l'air extérieur, que celui-ci fait d'effort pour le comprimer; par conséquent la pression de l'air qui environne ne se fait nullement sentir dans le vase (§. 13. Hydrost.) *Ce qui forme la preuve du premier article.*

Si l'on a pompé l'air du vase en tout ou en partie seulement; (§. 11.) dans le premier cas le vase ne resiste pas à la pression de l'air extérieur, & dans le second cas, cette partie d'air qui est restée, devient plus raréfiée que l'air extérieur, (§. 16.) par conséquent son élasticité n'a plus la même force, & elle devient comme celle d'un ressort détendu. (§. 24.) Or n'y ayant rien, ou presque rien dans le vase qui resiste à la pression de l'air extérieur, il doit avoir son effet proportionné, ou à la force de tout l'air qui comprime, ou à l'excés qui l'emporte sur la résistance que peut faire l'air intérieur (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

35. Vous pouvez tirer de-là, la raison pourquoi une cloche de verre placée sur un disque de cuivre, & dont on pompe tout l'aïr, y est si fortement attachée qu'on ne peut absolument l'en arracher; pourquoi deux hémisphéres de cuivre dont on a pareillement pompé l'air, & dont les bords ont été frottés de suif, se tiennent si étroitement unis, que tous les efforts de plusieurs chevaux ne sont pas capables de les separer; pourquoi enfin, les verres dont la forme est angulaire se brisent par la pression de l'air extérieur, pendant qu'on pompe

l'air qu'ils contiennent ; & ainſi de mille autres effets.

Théorême III.

36. Si on laiſſe un peu d'air ſur le mercure dans le tube de Toricelli, ce mercure demeurera ſuſpendu à une moindre hauteur que ſi le tube étoit entiérement vuide.

Démonſtration.

Si l'air intérieur a la même denſité que l'air extérieur, il n'eſt en équilibre avec lui que par la force de ſon élaſticité (§. 23. Airom. & 13. Hydroſt.) le mercure commence donc à deſcendre par la force de ſa propre gravité (§. 13. Hydroſt.) Alors l'air renfermé ſe dilate ; (§. 14.) & en ſe dilatant, ſa vertu élaſtique s'affoiblit ; (§. 24.) étant ainſi raréfié, il n'eſt plus en équilibre avec l'air extérieur (§. 13. Hydroſt.) qui preſſe le mercure pour le faire remonter dans le tube ; mais alors le mercure, trouvant l'air intérieur qui s'y oppoſe, il ne peut monter à une hauteur auſſi grande que s'il ne rencontroit point d'obſtacle. Par conſéquent il demeurera ſuſpendu à une moindre hauteur que ſi le tube étoit entierement vuide. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Corollaire I.

37. Comme la gravité du mercure & l'élaſticité de l'air ſont enſemble en équilibre avec l'air extérieur, il reſtera donc dans le tube autant de mercure qu'il en faut pour ſupléer à ce qui manque à l'air intérieur, afin qu'il puiſſe demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Corollaire II.

38. Par conſéquent l'élaſticité de l'air renfermé eſt équivalente au poids de la colonne de mercure, qu'il ſeroit néceſſaire d'ajouter pour être capable par ſon propre poids, de demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Théorême IV.

39. Si la péſanteur de l'air diminue, le mercure deſcend dans le tube; ſi la gravité de l'air augmente, le mercure doit monter.

Démonſtration.

Le mercure ſuſpendu dans le tube eſt en équilibre avec la péſanteur de l'air; (§. 30.) par conſéquent ſi celle-ci diminue, le mercure n'étant plus tant comprimé deſcendra; au contraire l'air ayant plus de gravité, le mercure doit neçeſſairement monter. (§. 13. Hydroſt.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

40. Le mercure étant tous les jours ou plus haut ou plus bas dans le tube, quoique cette variation ne ſoit pas toujours fort ſenſible, on doit conclure que la péſanteur & l'élaſticité de l'air eſt ſujette à bien des changemens.

Corollaire II.

41. Auſſi le barométre n'a-t-il été inventé que pour meſurer les changemens qui arrivent dans la péſanteur de l'air. On l'appelle encore *Baroſcope.*

Problême III.

42. Comprimer l'air dans un vaſe par le moyen de la machine pneumatique.

Solution.

1°. Appliquez le vaſe AB à la mâchine. Fig. 4.

2°. Tournez du côté de la cavité de la machine le trou oblique du robinet, & ôtez l'aiguille de laiton I. Fig. 1.

3°. Tirez de la machine le piſton DE : alors l'air paſſant par le trou du robinet & par le tuyau EB, entrera dans la machine.

4°. Tournez enſuite le robinet de façon que le tuyau FK étant ouvert, la communication enrre le vaſe & le cylindre ſoit auſſi ouverte, & que le point I ſoit bouché.

5°. Alors ſi vous retirez le piſton DE, l'air paſſera de la machine dans le vaſe par le tuyau FKL, & il ſera néceſſairement comprimé. (§. 8.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

43. Pour que cette expérience ſe faſſe avec ſuccès, il faut que le vaſe ſoit bien affermi ſur la machine, parce que l'air étant comprimé, ſa vertu élaſtique fait beaucoup d'effort (§. 24.) ; & il pourroit arriver que le vaſe étant deplacé, bleſſeroit quelqu'un des ſpectateurs, particulierement s'il eſt de verre.

Experience IV.

44. Si vous preſentez devant le feu une veſſie remplie d'air mediocrement, & liée bien étroite-

ment pour empêcher que l'air n'en ſorte, elle ſe gonflera beaucoup, & pourra même ſe rompre avec grand bruit : mais ſi vous la retirez de devant le feu avant qu'elle ſoit rompue, elle redeviendra flaſque & molle comme auparavant.

Corollaire I.

45. Comme malgré la preſſion de l'air extérieur, la chaleur dilate celui qui eſt dans la veſſie, (§. 9.) il faut que la force qui occaſionne cette dilatation (§. 15.) ſoit plus grande que celle de la preſſion de l'air exterieur (§. 13. Hydroſt.) Il eſt donc clair que la chaleur deplie la force élaſtique de l'air.

Corollaire II.

46. Et puiſque par l'abſence de chaleur la veſſie qui étoit tendue devient flaſque comme auparavant, il faut donc que le froid diminue la force élaſtique de l'air.

Corollaire III.

47. De-là vient que ſi vous rempliſſez d'eau le tube de verre BC, laiſſant le globe AB rempli d'air, & que vous mettiez l'orifice C dans un vaſe plein d'eau EF, celle qui eſt dans le tube BC montera à proportion que l'air ſera froid ; elle deſcendra au contraire, ſi le froid diminue ou que la chaleur augmente. La raiſon de ces effets, c'eſt que dans le premier cas l'air ſe condenſe dans le globe, & dans le ſecond il ſe dilate.

Fig. 2.

Remarque.

48. Cet inſtrument a d'abord été en uſage pour

mesurer les changemens du froid ou de la chaleur, & on l'a nommé *Thermométre*, ou avec plus de raison *Thermoscope*. A la place du vase on a mis le tube sur un autre globe ayant un petit trou. En effet la gravité de l'air pouvant par ses variations produire plusieurs changemens (§. 29. 40.) on a été obligé d'inventer différens instrumens pour pouvoir connoître ces variations.

Problême IV.

49. Faire un Thermoscope par le moyen duquel on puisse connoître les changemens du froid & de la chaleur de l'air.

Solution.

1°. Colorez de l'esprit de vin bien rectifié & à l'épreuve de la poudre à canon, avec des morceaux de l'écorce de la racine de curcume ou d'orcanette, la premiere racine lui donnera une couleur jaune, & la seconde une couleur rouge.

2°. Filtrez ensuite plusieurs fois cet esprit de vin par une feuille de papier gris, afin que les parties de ces racines ne soient point mêlées dans la liqueur.

3°. Remplissez le globe AB & le tube BC de cet esprit de vin filtré, & crainte d'en mettre trop peu, ou qu'en hyver tout l'esprit ne descende dans le globe, il seroit à propos de mettre le globe sur de la neige salée, ou sur de la glace polie, sur laquelle vous aurez jetté beaucoup de sel. Si c'est en été que vous vouliez faire un thermoscope, pour prevenir le même inconvenient, vous mettrez le globe dans de l'eau de fontaine bien fraîche, & dans laquelle vous aurez fait dissoudre beaucoup de nitre; vous l'y laisserez jusqu'à ce que l'esprit ne descende pas plus qu'il ne faut. Fig. 6.

4°. Si l'esprit de vin montoit trop haut au-dessus du globe, il en faut verser un peu, & plonger insensiblement le globe dans de l'eau chaude, non pas tout d'un coup, car il se briseroit, mais on l'expose d'abord à la vapeur de l'eau bouillante, & quand il est échauffé, on le plonge dans l'eau, & pour lors l'esprit montera dans le tube & en chassera l'air. Lorsqu'il commencera à se former de petites ampoules dans l'esprit, il faut retirer promptement le globe de l'eau, autrement l'esprit se répandroit avant que vous vous en fussiez apperçu.

5°. Vous ferez ensuite rougir le bout du tube à la lumiere d'une lampe, & vous le fermerez hermetiquement au point C.

6°. Enfin vous appliquerez le tube sur une petite planche légere sur laquelle sera collée une échelle divisée en parties égales, ce qui forme les différens degrés.

Voilà le thermoscope fait.

Demonstration.

L'experience prouve que le froid condense l'esprit de vin, & que la chaleur le raréfie. Or par le moyen de cet instrument on comprend aisément que le froid augmente si l'esprit de vin descend dans le tube, & que s'il monte la chaleur est plus grande. Donc on peut faire un thermoscope qui fasse connoître les changemens de la chaleur & du froid dans l'air. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

50. Si l'esprit de vin descend beaucoup dans le tube, il est constant que l'air est considerablement réfroidi, & qu'il est beaucoup plus chaud, à pro-

Hydrostatique.

2

N H M K

3

P T S V Q R

5

D F A C E B

Z

6

A C B

Airometrie.

Fig. I.re

N A B D E I H P Q L F G K

4

A B

5

6

A

portion de ce que le même esprit de vin est monté. Mais comme on ne sçauroit connoître combien, par exemple, le degré de chaleur d'aujourd'hui est contenu de fois dans le degré de chaleur d'un autre jour, on ne peut pas dire dans ce sens que le thermoscope serve à mesurer la chaleur (§. 2.)

Remarque seconde.

51. Au reste, quoiqu'on y remarque des changemens très-sensibles, particulierement lorsque le tube est très-menu, de façon qu'on le voit très-notablement monter quand on applique la main sur le globe, & qu'il descend aussi-tôt qu'on l'en a retirée; on a néanmoins observé qu'après être beaucoup descendu pendant le grand froid, il reste assez long-tems au même degré, quoique la température de l'air soit beaucoup adoucie.

Remarque troisiéme.

52. On designe ordinairement sur la table des degrés de deux espéces, dont les uns marquent le commencement de la chaleur, & les autres le décroissement, ou le commencement du froid. On descend pour cela le Thermoscope dans une chambre basse ou dans une cave, & on l'y laisse toute la nuit. Le lendemain on marque le degré d'élévation de l'esprit de vin dans le tube, au-dessus duquel degré, comme temperé, on marque toujours en montant ceux de la chaleur, & au-dessous toujours en descendant les dégrés du froid.

Fin de l'Airometrie.



ELEMENS D'HYDRAULIQUE.

DEFINITION I.

1. L'*Hydraulique* est la Science qui traite du mouvement des fluides, & plus particulierement du mouvement des eaux.

DEFINITION II.

2. Le *Tube* ou *Tuyau* est un cylindre creux.

Problême I.

3. Elever les eaux par le moyen de la vis d'Archimede.

Solution.

Pl. I. Fig. 1. 1°. Entourez le cylindre AB d'un tuyau de plomb que vous adapterez en forme de vis (§. 90. Méch.)

2°. Fichez au bas du cylindre un cloud long & rond, & vous attacherez en haut du même cylindre une manivelle avec laquelle on puisse le faire tourner.

3°. Donnez enfin une pente à ce cylindre d'environ

ron 45 degrés, & vous plongerez l'extremité B dans l'eau que vous voudrez élever. C'est en tournant le cylindre par le moyen de la manivelle que vous ferez votre opération.

Démonstration.

En effet, si vous plongez dans l'eau l'ouverture inférieure du cylindre, l'eau par son propre poids doit couler en F, & tournant la vis, la même eau doit monter de F en G, de G en H, & ainsi par dégrés jusqu'en A, *ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

4. Par le moyen de cette machine on puise à la vérité beaucoup d'eau avec peu de force; mais on ne la fait pas monter bien haut. On s'en sert fort commodément pour dessécher les marais.

Problême II.

5. Faire un chapelet pour faire monter l'eau. Pl. I. Fig. 2.

Solution.

1°. Plantez dans l'eau un tuyau de bois de la hauteur que vous voulez élever l'eau.

2°. Placez les deux cylindres GH & ED, celui-ci au fond de l'eau, & celui-là au-dessus du tuyau. Ces deux cylindres doivent être attachés à deux essieux de fer, autour desquels ils puissent tourner.

3°. Faites enfin passer autour des deux cylindres & en dedans du tuyau une corde ou une chaine où seront attachés des globes de cuir de grosseur à pouvoir remplir la cavité du tuyau. Si l'on fait

tourner le cylindre GH, l'eau montera jusques en L.

Démonstration.

Le tuyau étant ouvert au point B, pour donner entrée au chapelet, l'eau y entre & monte à la hauteur de celle qui l'environne. (§. 15. Hydrost.) Or si vous faites tourner le cylindre GH, celui qui est au fond de l'eau ED doit tourner pareillement, & les globes du chapelet, doivent entrer dans le tuyau & en fermer l'issue à l'eau qui y est; ils la poussent en haut: par conséquent, en montant eux mêmes, ils la font monter & la poussent jusques en L. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême III.

6. Faire monter l'eau par le moyen de petits seaux attachés à une chaîne.

Solution.

Fig. 3. 1°. Placez horisontalement au fond de l'eau un cylindre ou prisme exagone MN, qui puisse tourner autour d'un essieu de fer.

2°. Posez au lieu jusqu'où vous devez faire monter l'eau un pareil cylindre ou prisme OP, paralléle à l'autre, & tournant également sur un essieu de fer.

3°. Attachez des petits seaux aux chaînes qui doivent passer à l'entour de l'un & de l'autre cylindre.

4°. en tournant le cylindre qui est au-dessus de l'eau, celui qui est au fond tournera pareillement; les petits seaux puiseront l'eau, & la porteront jusques en P, où elle s'écoulera dans quelque vaisseau placé pour la recevoir.

Remarque.

7. Il en coute beaucoup pour l'entretien de la premiere machine, parce que les globes de cuir se gâtent facilement. Elle est d'ailleurs fort incommode en hiver, parce que les chaînes se brisent, & si l'on fait usage de cordes, elles se rompent encore plus aisément. Ce n'est pas le tout; il faut beaucoup de force pour entretenir cette machine en mouvement, pendant le tems nécessaire à l'effet qu'on se propose, parce qu'il s'y fait un grand frottement des parties dont la machine est composée.

Problême IV.

8. Faire monter l'eau par le moyen du tympan.

Solution.

1°. Construisez un tympan ou tambour avec des jantes & des rayons.

2°. Placez entre les doubles rayons des petits coffrets ou boëtes, bien fermés au-dessus, & percez des petits trous dans l'autre côté A, afin que l'eau puisse y entrer. Fig. 4.

3°. Affermissez & clouez parfaitement par un côté le fond de ces boëtes sur les jantes; & vous le laisserez avancer un peu sur l'autre côté, pour pouvoir y laisser un trou quarré par lequel l'eau puisse s'écouler. Si l'on suspend cette roue sur l'eau, de façon qu'une partie de sa circonférence y soit plongée, & qu'on la mette ensuite en mouvement, les seaux se rempliront en passant dans l'eau, & se vuideront quand ils auront passé le haut de la machine.

Nous ne pouvons point parler dans cet abregé de tous les tympans, dont on se sert pour puiser l'eau. Il y en a un grand nombre que nous passons sous silence.

Problême V.

9. Faire une *pompe aspirante*, par le moyen de laquelle on puisse élever en haut l'eau d'un puits ou autre lieu bas & profond.

Solution.

Pl. I. Fig. 5. 1°. Plantez perpendiculairement dans l'eau un tuyau de bois ABCD.

2°. Mettez au bas de ce tuyau DC une *soupape* I qui ne puisse s'ouvrir que par le haut.

3°. Attachez à la verge de fer EL le piston creux LK, qui doit être assez gros pour remplir exactement le dedans du corps du tuyau, ensorte que l'eau ne puisse point passer entre deux.

4°. Faites une autre soupape au-dessus en L; si vous haussez & baissez le piston dans le tuyau, l'eau montera jusqu'au haut du tuyau.

Démonstration.

En haussant le piston il laisse un espace vuide d'air dans le tuyau, & l'air pressant l'eau, elle est obligée de monter dans le tuyau pour remplir ce vuide, & leve en montant la soupape I. (§. 27. Airom.) le piston étant une seconde fois baissé, la soupape inférieure I se ferme & celle qui est au-dessus doit s'ouvrir & laisser monter l'eau; ainsi en réitérant les mouvemens du piston, l'eau doit monter jusqu'en MH & se répandre. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Remarque.

10. Les *soupapes* les plus simples sont rondes & faites de cuir, on les attache par leurs anses à l'ouverture du piston. On en fait encore de cuivre couvertes d'un cuir mince, & mobiles par le moyen d'une charniere D : mais pour qu'elles se ferment plus sûrement on met un ressort au point G. Pl. I. Fig. 6.& 7.

Problême VI.

11. Faire une pompe foulante qui pousse l'eau bien haut.

Solution.

1°. Faites deux cylindres de laiton ABCD au fond desquels DC vous mettrez des soupapes. Pl. I. Fig. 8.

2°. Soudez à chacun un tuyau garni de soupapes en H & I qui s'ouvrent en haut.

3°. Mettez dans l'un & dans l'autre un piston K qui en remplisse exactement la cavité, pour que l'eau ne puisse passer entre deux.

Démonstration.

Quand on hausse le piston, la soupape qui est au fond s'ouvre, & l'air extérieur pousse l'eau dans le cylindre : (§. 29. Airom.) mais lorsqu'on baisse le piston, la soupape L se referme, & l'eau est chassée par le tuyau qui est à côté ; elle ouvre les soupapes IH, & monte plus haut par le tuyau N.

Remarque premiere.

12. On peut faire encore une soupape de cette façon. On fait par le moyen du Tour un trou A, Fig. 9.

en forme de cône tronqué, au bas du cylindre, & l'on y place un cône tronqué de laiton travaillé au tour, & armé d'un cloud ou cheville D, qui l'empêche de tourner. Ou bien on perce un trou hémisphérique où l'on met un globe de laiton qui le remplisse exactement.

Remarque seconde.

13. Pour faire une pompe d'où l'eau coule sans cesse & avec vitesse, on ajuste deux cylindres avec leurs pistons, de maniere que l'un monte quand l'autre baisse; & par ce moyen l'eau monte sans interruption. On se sert de cette machine pour éteindre le feu dans les incendies, & pour les autres machines qui regardent les eaux.

DEFINITION III.

14. Par *les ouvrages à eau* nous entendons une machine par le moyen de laquelle on fait couler l'eau dans les lieux voisins, par exemple, dans toutes les fontaines d'une maison; comme la Samaritaine à Paris.

Problême VII.

15. Faire un ouvrage à eau, ou un réservoir pour la distribution des eaux.

Solution.

1°. Elevez une tour ou autre édifice au-dessus du niveau des eaux, & d'une hauteur proportionnée à la pente requise, pour qu'elles puissent couler de cette tour dans les lieux proposés.

2°. Faites monter l'eau dans cette tour ou dans cet édifice, par le moyen ou du chapelet, (§. 5.)

ou des petits seaux attachés à des chaînes, (§. 6.) ou du tympan, (§. 8.) ou des pompes, (§. 9. 11.) lesquelles machines vous appliquerez par les puissances animées ou inanimées, selon les régles de la Méchanique que nous avons données dans les *Elemens de Méchanique*, §. 109. 110. 120. & dans les suivans.

3°. Il faut ramasser l'eau dans un réservoir de plomb ou de cuivre, au fond duquel il y ait des tuyaux par lesquels elle puisse descendre.

4°. Pour que l'eau ne monte point au-dessus des bords du réservoir, il faut mettre un ou deux tuyaux presque au niveau des bords, & elle s'écoulera par les tuyaux dans le fleuve d'où on la puise.

5°. Ces tuyaux verticaux doivent être adaptés à d'autres tuyaux horisontaux ou inclinés, cachés sous la terre, & qui viennent jusqu'aux endroits où l'on veut conduire les eaux.

6°. L'eau étant enfin parvenue à l'endroit où on veut la faire couler, on doit élever des tuyaux verticaux sur les horisontaux, avec lesquels ils doivent avoir une communication; par ce moyen l'eau montera dans ces tuyaux: (§. 15. Hydrost.) & vous aurez perfectionné l'ouvrage à eau. (§. 14.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

16. On devroit avoir dans les maisons des canaux grands comme des puits, & mettre dans les canaux horisontaux des pistons qu'on pût ouvrir ou fermer par le moyen d'une verge de fer. On pourroit ainsi faire couler les eaux, ou en arrêter le cours. Il faut avoir soin en Hyver de couvrir ces tuyaux de fumier ou de paille, pour que l'eau ne se géle point.

Corollaire.

17. Comme l'expérience nous apprend que l'eau monte presque à la même hauteur d'où elle est descendue, on pourra faire des fontaines jaillissantes en élevant les eaux par la machine que nous avons décrit; & la conduisant par des canaux de cuivre ou de plomb jusqu'à la fontaine d'où elles doivent jaillir.

Remarque seconde.

18. Selon les principes de l'Hydrostatique, (§. 15. Hydrost.) l'eau devroit remonter à la même hauteur précisément d'où elle étoit tombée; mais l'expérience est contraire, & nous fait voir qu'elle monte moins haut; si même le canal est trop grand à raison de la force qui comprime, elle ne jaillira point du tout, & ne fera que couler: nous ne chercherons point ici les raisons d'une telle expérience.

Problême VIII.

19. Construire, pour l'agrément, des fontaines jaillissantes qui représentent diverses figures.

Solution.

Comme l'eau qui jaillit prend la figure que lui donne l'ouverture du tuyau, & qu'elle conserve la direction qu'elle en reçoit; tout dépend donc de la forme de l'ouverture du tuyau & de sa direction.

1°. Si l'on veut faire monter l'eau en forme de verge, il faut élever un tuyau perpendiculaire à l'horison. Si l'eau sort du tuyau avec assez de force

& de rapidité, on peut mettre une boule creuſe & fort légére de cuivre doré ſur le jet qui la ſoutiendra perpendiculairement comme ſuſpendue en l'air, & dans un mouvement continuel, pourvû qu'elle ne ſoit point trop expoſée au vent : on peut encore placer un entonnoir à l'ouverture du tuyau, afin que ſi cette boule venoit à tomber, l'eau puiſſe la faire remonter : c'eſt ainſi que l'eau jouera à la paume, (pour ainſi dire) avec la boule.

2°. Si vous voulez faire jaillir l'eau de tous les côtés, il faut ſe ſervir de pluſieurs petits tuyaux que vous placerez les uns verticalement, les autres horiſontalement, & les autres formeront tel angle que vous voudrez. Vous pourrez encore mettre au bout du tuyau un ajutage fait comme un hémiſphére ou comme un cône fermé à ſa partie ſupérieure, ou un cylindre percé de pluſieurs petites ouvertures : par le moyen de ces machines l'eau doit ſe répandre de tous les côtés en forme de petits filets.

3°. On peut repréſenter l'arc-en-ciel en formant cet ajutage de façon que l'eau en retombe toute en petites goutes ; car pour lors, ſi on ſe place entre le ſoleil & la fontaine, les rayons du ſoleil frappans ſur cette eſpéce de pluye, feront appercevoir les couleurs de l'arc-en-ciel. Pour réuſſir à faire tomber l'eau en petites goutes, il faut la faire jaillir par une infinité de très-petits trous, ou par un ſeul tout raboteux, ou la faire tomber ſur quelque hémiſphére ou toît rond, d'où elle puiſſe ſe répandre de tous les côtés.

4°. Vous pourrez enfin former une nape d'eau, en la faiſant paſſer par une fente étroite & polie.

On trouve dans l'*Architecture curieuſe* de Boëcler pluſieurs autres manieres d'orner les fontaines.

Problême IX.

20. Faire un vase propre à arroser les jardins.

Solution.

Pl. II. Fig. 10

1°. Faites un vase sphérique HB, ou de telle autre figure que vous voudrez, pourvû qu'il ait un cou un peu étroit HE, & que le fond de l'hemisphére soit percé de plusieurs petits trous en DB.

2°. Soudez au col du vase un tuyau E qu'on puisse boucher avec le pouce. Je dis que si vous plongez ce vase dans l'eau, elle entrera par les petits trous ; & si vous le retirez de l'eau, & que vous bouchiez le petit tuyau avec le pouce, il n'en sortira pas une seule goute ; mais enfin si vous retirez le pouce, l'eau s'écoulera comme une rosée par les petites ouvertures, & par conséquent cette machine est très-utile pour arroser les jardins.

Démonstration.

Si vous plongez le vase dans l'eau jusqu'au tuyau ouvert en E, il se remplira par les petits trous jusqu'à ce que l'eau qui y est entrée soit au niveau de celle qui l'environne (§. 15. Hydrost.) mais si mettant le pouce sur l'ouverture E vous retirez le vase, comme sa hauteur ne passe point un ou deux pieds, & les trous étant assez petits pour empêcher l'air d'entrer, si l'eau venoit à couler, l'air extérieur doit absolument empêcher que l'eau ne sorte. Si vous retirez le pouce, la colonne entiére d'air qui prend depuis l'ouverture E jusqu'à l'extremité de l'atmosphere doit graviter sur l'eau du vase ; & pésant avec cette eau, elle gravitera sur le fond DB : ainsi la pression de l'air qui passe

par l'ouverture du vase étant égale à la résistance de l'air qui presse au fond, (§. 15. Hydrost.) le poids de l'eau l'emportera sur la résistance, par conséquent l'eau s'écoulera par le fond du vase. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problême X.

21. Faire un siphon, c'est-à-dire, une machine par le moyen de laquelle on puisse vuider la liqueur d'un vase.

Solution.

Faites un vase FE dont le milieu ABCD ait la figure d'un cylindre, & dont les extrémités AFB, & CED ayent celle d'un cône tronqué. Que les ouvertures F & E ne soient pas plus grandes qu'il le faut pour être bouchées avec le doigt. Fig. 15.

Je dis que si vous plongez ce vase dans une liqueur il s'en remplira, quoique l'orifice supérieur soit beaucoup au-dessus. Et que mettant le doigt sur l'orifice F, & retirant ce vase, la liqueur ne coulera point, mais que si vous retirez le doigt, elle se répandra entiérement.

Démonstration.

C'est la même que celle du Problême précédent.

Théorême I.

22. Si vous plongez dans une liqueur la branche la plus courte d'un tuyau recourbé, & que vous succiez l'air par l'ouverture C, la liqueur montera dans la branche qui trempe dans le vase, & elle coulera autant de tems par le tuyau BC que Fig. 12.

l'ouverture A y fera plongée, & que la liqueur fera à une plus grande hauteur que l'ouverture C.

Démonſtration.

Si vous ſuccez l'air, le ſiphon ſera vuide; ainſi l'air extérieur preſſant l'eau qui eſt dans le vaſe, (§. 18. Airom.) & ne trouvant aucune réſiſtance dans le ſiphon, il la fera monter dans la branche AB, d'où par ſa propre gravité elle deſcendra par la branche BC; & comme l'air preſſe autant en A qu'en C, & que l'eau au contraire qui eſt dans la branche BC, preſſe plus vers C que celle qui eſt dans la branche AB ne preſſe vers A, parce que la perpendiculaire de celle-là eſt plus grande que la perpendiculaire de celle-ci. (§. 17. Hydroſt.) il faut néceſſairement que l'eau coule par le bout C, juſqu'à ce que l'air puiſſe entrer par le bout A dans le ſiphon, & ſurmonter l'inégalité de la preſſion. (§. 13. Hydroſt.) *Ce qu'il falloit demontrer.*

Remarque premiere.

23. Il importe peu que l'une ou l'autre branche du ſiphon, ou même que toutes les deux branches ſoient recourbées, pourvû que l'orifice ſoit plus bas que la ſuperficie de l'eau qu'on veut puiſer. (§. 17. Hydroſt.)

Remarque ſeconde.

24. On change quelque fois la figure du ſiphon, Fig. 13. & à la place de la branche la plus courte on fait un gros tuyau RS, ſoudé au fond du vaſe TV, n'ayant qu'un orifice en R. Dès que l'eau a commencé à couler par le tuyau PQ, elle continue à ſe répan-

dre, jusqu'à ce que l'air puisse pénetrer par l'orifice R dans le grand tuyau. C'est pourquoi on appelle ce siphon *Diabetes.*

Problême XI.

25. Faire une fontaine intermittente, c'est-à-dire une fontaine qui coule à diverses reprises.

Solution.

1°. Faites passer dans un vase rond un tuyau FHM que vous souderez au milieu du fond de ce vase, & dont les deux extrémités étant ouvertes, la premiere ira presque toucher le couvercle. Fig. 14.

2°. Soudez l'orifice inférieur au bassin CD d'où l'eau puisse couler par un petit trou fait au milieu dans un vase que vous placerez au-dessous. Faites aussi un petit trou au tuyau FHM fort près du bassin.

3°. Qu'il y ait une ouverture garnie d'une vis au couvercle du vase, par où vous puissiez faire entrer l'eau, & que le fond du vase soit percé de plusieurs trous qui donnent passage à l'eau.

Si vous remplissez le vase supérieur, l'eau tombe en goutes par les petits trous dans le bassin, & bouchant la petite ouverture M, empêchera que l'air ne puisse aller prendre sa place, & par conséquent elle cessera de couler: cependant celle qui est dans le bassin tombera dans le vase inférieur, & dès que l'ouverture inférieure du tuyau M sera dégagée, & que l'air pourra pénétrer dans le vase supérieur, l'eau recommencera à couler par les petits trous comme auparavant.

Problême XII.

26. Faire une fontaine jailliſſante dans un vaſe de verre fermé.

Solution.

1°. Ayez une boule creuſe de verre dont l'ouverture ſoit garnie d'une vis BE.

Fig. 15. 2°. Faites paſſer dans la vis un petit tube DC, ayant l'ouverture C fort petite, & celle de l'autre bout D qui ſort du verre beaucoup plus grande.

3°. Soudez à la même vis un tube EF, large vers le bout E, & menu vers F, mais long au double de l'autre.

4°. Faites une communication entre les deux vaſes IK & LM par le moyen du tube HN, & ſoudez à la baſe du ſupérieur le tube GH, dans lequel vous introduirez le tube EF, de façon qu'il deſcende juſqu'au vaſe inférieur.

Si vous rempliſſez d'eau le vaſe IK & environ le tiers du globe A, elle deſcendra du globe par le tube EF dans le vaſe LM, & montera dans la boule par le petit tube DC en jailliſſant par l'ouverture C.

Problême XIII.

27. Mettre l'eau en mouvement par la force élaſtique de l'air.

Solution.

1°. Faites un vaſe cylindrique de cuivre & ſolide

Fig. 16. ADBC dont les deux fonds AB & CD ſoient bien forts.

2°. Menagez dans le fond CD un trou garni d'une vis pour ſervir de bouchon, & par lequel vous puiſſiez y verſer de l'eau.

3°. Soudez au fond du haut AB, le tube FE, qui descende presque jusqu'au fond CD, & dont la partie F qui s'éléve au-dessus du vase, soit faite en vis, afin de pouvoir y adapter non-seulement une pompe foulante, mais encore le robinet F qui doit donner ou fermer le passage à l'air & à l'eau renfermés dans le vase.

Si le vaisseau étant ainsi preparé vous y comprimez l'air par le moyen d'une pompe ou seringue (§. 42. Airom.) & qu'après l'avoir retirée vous adaptiez en F le petit tube dont l'ouverture sera très-petite, & qu'ensuite vous ouvriez le robinet, l'air fera sortir l'eau par le tube F avec beaucoup d'impétuosité.

Demonstration.

L'élasticité de l'air se bande extremement par la compression (§. 24. Airom.) & comme il presse infiniment plus que l'air extérieur ne résiste, il faut absolument qu'il chasse l'eau hors du vase, jusqu'à ce qu'ayant acquis une densité égale à l'air extérieur, il se trouve en équilibre avec lui. (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Méthode.

Ayez un globe creux de verre double AB, à l'ouverture A duquel vous attacherez avec du ciment un tube aussi de verre CD, dont le bout C & son ouverture seront très-petits, & iront en s'élargissant un peu jusqu'au fond du globe. Si après l'avoir presque tout rempli d'eau vous comprimez l'air qui y est renfermé en soufflant fortement dedans avec la bouche. Dès que vous l'aurez retirée, l'eau sortira du vase comme une fontaine. Fig. 19.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque premiere.

28. On peut faire le globe de cuivre au lieu de verre, & pour lors il n'est pas nécessaire de faire descendre le tube dedans le globe. On nomme cette machine *æolipile*. Pour la mettre en usage, on fait chauffer ce globe sur un réchaut ; on plonge ensuite l'orifice C dans l'eau, & peu à peu le globe se remplit. Lorsqu'il est presque plein on le remet sur le feu, & quand il a acquis un certain degré de chaleur, l'air se dilatant, & trouvant l'eau qui s'oppose à sa sortie, il la chasse par l'orifice C à la hauteur d'une douzaine de pieds. Si au lieu d'eau on remplit le globe d'esprit de vin ou de la fine eau de vie, & qu'on approche une bougie allumée de l'orifice C, pendant que l'air la fait sortir, au lieu d'un jet d'eau, l'esprit de vin forme un jet de feu.

Remarque seconde.

29. Le verre ne pouvant résister à l'action du feu, pour remplir le globe de verre, il faut en succer l'air à diverses reprises autant qu'on le pourra, & plonger aussi-tôt l'orifice dans l'eau ; car l'air extérieur forcera, par sa pression, l'eau d'entrer en aussi grande quantité que celle de l'air que vous en avez pompé en suçant. (§. 34. Airom.)

Problême XIV.

30. Faire une fontaine jaillissante, d'où l'eau qui

qui sort est obligée de rentrer avec celle qui demeure.

Solution.

Mettez l'un sur l'autre, & joignez bien ensemble deux vases PR & HQ. Qu'il y ait un espace entre deux, ou qu'il n'y en aye pas, n'importe. S'il y en a, affermissez-les l'un sur l'autre avec des colonnes bien soudées. Fig. 17.

2°. Soudez au couvercle du vase supérieur (lequel couvercle doit être concave & fait en forme de bassin) le tube DL ouvert par les deux bouts, & qui descendra presque jusqu'au fond du vase inférieur HQ.

3°. Soudez au couvercle du vase inferieur le tube FM, ouvert aussi par les deux bouts, & qui montera presque jusqu'au couvercle du vase superieur PD.

1°. Soudez enfin au milieu du couvercle du vase supérieur le tube AC, qui sera aussi ouvert par les deux bouts; mais dont l'ouverture A sera très-petite, & l'autre de la largeur du tube, qui doit descendre presque jusqu'au fond du vase supérieur HR.

Si après avoir rempli d'eau le vase supérieur; vous en jettez ensuite sur son couvercle KO, l'eau commencera à jaillir par l'ouverture A, & il en sortira autant qu'il y en aura dans le vase supérieur.

Démonstration.

Pendant que l'air du bassin KO s'insinue par le tube DL, elle chasse l'air du vase HQ, & le faisant passer par le tube FM, elle le pousse dans le vase supérieur; & parce que la pression de l'eau le

comprime, son élasticité se bande (§. 24. Airom.) Or l'air extérieur pressant avec moins de force en A que l'air renfermé dans le vase PR; il faut nécessairement que l'eau sorte par l'orifice A, & cette eau qui sort retombant sur le bassin KO, elle entre de nouveau par le tube DL, & chasse l'air du vase inférieur dans le supérieur, par le tube FM. Il en jaillira donc autant qu'il s'en trouvera dans le vase supérieur, & de cette façon l'eau qui sort rentre avec celle qui demeure. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

31. On croit qu'Heron d'Alexandrie fut l'inventeur de cette fontaine ingénieuse; c'est pourquoi on la nomme la *Fontaine de Heron.* L'eau en sort par la même raison que nous avons rapportée dans le §. 27. excepté que dans le cas présent l'air se trouve comprimé par la pésanteur de l'eau qui s'introduit par le tube DL.

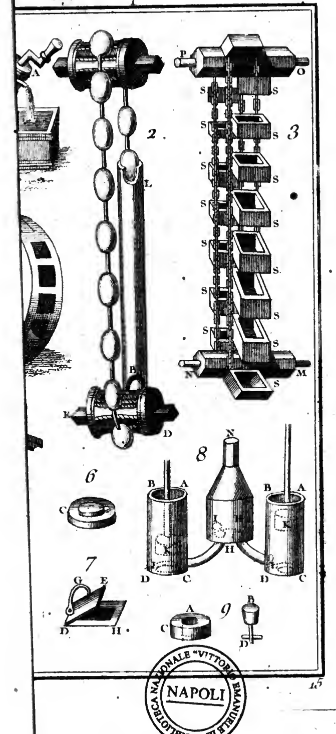
Problême XV.

32. Faire une fontaine jaillissante par le moyen de l'air rarefié par la chaleur.

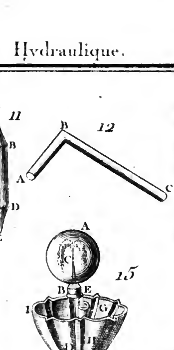
Solution.

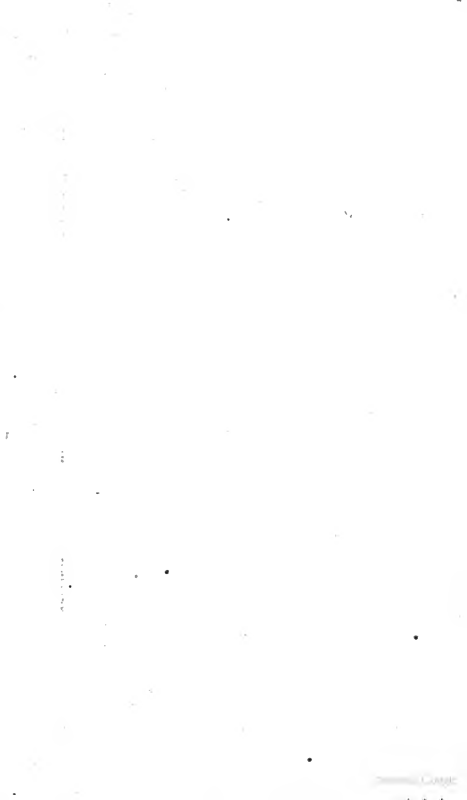
1°. Ayez deux vases ABCD, & CDEF, séparez l'un de l'autre uniquement par le fond du vase supérieur, sur lequel vous souderez un bassin AGHB de même capacité que le vase.

Pl. II. Fig. 18. 2°. Adaptez au fond du vase supérieur un tube ouvert IK qui communique d'un vase à l'autre, & dont le bout K ne monte pas jusqu'au couvercle du vase supérieur. Soudez au milieu du bassin un autre tube dont l'extremité M s'éléve au-dessus du bassin,



A
2.
L
B
K
D
P
O
S
3
N
M
6
C
7
G
E
D
H
8
N
B
A
I
K
H
D
C
9
A
C
B
D


11
F
B
D
E
12
A
B
C
13
S
T
V
Q.
15
A
C
B
E
I
G
D
H
K
L
N
F
M
16
F
A
B
G
E
C
D
18
M
G
H
A
B
C
D
C
E
F
19
C
A
B



n'ayant qu'une petite ouverture, & dont l'autre bout plus ouvert defcende prefque jufqu'au fond du vafe fupérieur CD.

Si vous pofez cette machine fur des charbons allumés après avoir rempli d'eau le vafe fupérieur, celle du vafe AD fortira par l'orifice M du tube ML, & elle tombera dans le baffin GH.

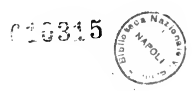
Démonftration.

La chaleur raréfiant l'air renfermé dans le vafe inférieur CDEF, bande fon élafticité (§. 45. Airom.) Cette élafticité comprime avec plus de force l'eau renfermée dans le vafe AD, que l'air extérieur ne réfifte à l'orifice M; par conféquent l'eau doit fortir par le tube LM. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On ne s'eft pas fort étendu fur l'Hydraulique dans cette traduction. Ceux qui voudront s'inftruire parfaitement de cette partie des Mathématiques, pourront l'étudier dans l'Architecture Hydraulique de M. Belidor, qui ne laiffe rien à défirer fur cette matiere.

Fin de l'Hydraulique.



FAUTES A CORRIGER dans le premier Volume.

PAGE 38, *ligne* 15 $\frac{12}{15}$ *lisez* $\frac{12}{15}$.
Page 46, *lig.* 14, donc, *lis.* dont.
Page 47, *lig.* 14, mettez un point & une virgule après quotient.
Page 112 *lig* 8, — *ab lis.* + *ab*,
Pag. 125, *lig.* 8. $x = \frac{860}{50}$ *lis.* $\frac{800}{50}$
Page 128, *lig.* 2, égal, *lis.* égale.
Page 144, *ligne derniere* 'arc *lis.* l'arc.
Page 168, *au bas de la marge*, Pl. III. *lis.* Pl. II.
Page 191, *lig.* 5, ajoutez △ avant BCD
Page 205, *lig.* 26 EA : AF = CD *lis.* = EC
Page 222, *lig.* 5. 144, *lis.* 44.
Ibid. ligne pénult. Mesurez, *lis.* Menez.
Page 235, *lig.* 17. 892, *lis.* 8920.
Pag. 255, *ligne derniere*, le sinus, *lis.* les sinus.
Pag. 262, *lig* 12, 28, *lis.* 29.
Pag. 279, *à la marge*, Pl. V. *lis.* Pl. I.
Pag. 288, *lig.* 18. = C, *lis.* = G.
Pag. 295, *lig.* 2, 36 *lis.* 56.
Pag. 311, *lig.* 9. 342, *lis.* 432.
Ibid. lig. 12, *effacez* 280.
Pag. 313, *lig.* 6, le point, *lis.* le poids.
Pag. 319, *lig.* 26, 58', *lis.* 58''
Pag. 326, *lig.* 26, mettre en mouvement une machine élastique, *lis.* par la force élastique.
Pag. 379, *à la marge*, Fig. 15, *lis.* Fig. 11.

